Prof. Dr. Jörg Brüdern
Leo Schäfer

Georg-August-Universität Göttingen
Wintersemester 24/25

Analytische Geometrie und Lineare Algebra I — Übungsblatt 2

Namen:

Übung: Abgabe bis: Montag, 11.11. um 10:00 Uhr

Aufgabe 0 (Keine Punkte)**.** Meldet euch (falls es noch nicht gemacht wurde) für die Klausurzulassung im FlexNow (`https://flexnow2.uni-goettingen.de/`) an. Das Modul ist:

`B.Mat.0012.Ue: Analytische Geometrie und Lineare Algebra I - Übung`

Achtet darauf, dass ihr euch auch wirklich für die Übung angemeldet habt, und nicht nur für eine der beiden Klausuren!

Aufgabe 1. Für $1 \leq i < j \leq n$ ist τ_{ij} durch $\tau_{ij}(l) = l$, falls $l \notin \{i, j\}$ sowie $\tau_{ij}(i) = j$ und $\tau_{ij}(j) = i$ ein Element von S_n definiert. Zeigen Sie:

$$\langle \{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\} \rangle = S_n.$$

Hinweis: Wie würden Sie ein Bücherregal sortieren.

Aufgabe 2. Sei G eine beliebige Untergruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$. Zeigen Sie, dass eine ganze Zahl $n \geq 0$ mit $G = n\mathbb{Z}$ existiert.

Hinweis: Jede nicht-leere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

Aufgabe 3.

(a) Wie viele verschiedene Gruppen mit 4 Elementen gibt es?

(b) Wie viele verschiedene Gruppen mit 6 Elementen gibt es?

(c) Finden Sie alle Normalteiler der Permutationsgruppe S_3.

Aufgabe 4. Laut Vorlesung ist $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ eine Gruppe. Sei $U \subset \mathbb{Z}^2$ eine nicht triviale Untergruppe. In dieser gibt es ein Element $v \neq (0, 0)$ mit minimalem Abstand zum Ursprung $(0, 0)$.

Angenommen $\langle v \rangle \neq U$. Dann gibt es ein weiteres Element $0 \neq w$, dass nicht in $\langle v \rangle$ enthalten ist und minimalen Abstand zum Ursprung hat.

Zeigen Sie, dass $\langle \{v, w\} \rangle = U$ ist.

Hinweis: Der Abstand von (x, y) zum Ursprung ist $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Falls ihr glaubt, dass auf dem Blatt ein Fehler ist, meldet euch bei Leo.