AnaMech
Vorlesung 3

Inhaltsverzeichnis

Uebersicht

- Team Captains
- Skript! Mitschreiben?
- Hoersaaluebung
- 2. Klausur im WiSe 2025
- Fragen?

Eindimensionale Systeme allgemein

Einen Massepunkt mit Masse m und Koordinate q

Beispiele:

1. Bewegung entlang einer kartesicschen Koordinate $q = x$
2. Feste (krummlinige) Kurve im $\mathbb{R}^3$ Koordinate i.a. nicht kartesisch
3. Problem als Resultat des Ausnutzens von erhaltungsgroessen (z.B. Zentralpotential, Hamiltonformalismus)

Formal:

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t), x(t_0), \dot{x}(t_0)$$

Zeitunabhaengige Probleme

$f = f(x)$

$\vec{f}$ ist konservativ $\Longrightarrow \exists V(\vec{r}) \Longrightarrow \vec{f}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \Longrightarrow E = T + V$ (Energieerhaltung)

$$V(x) = -\int_x^{x_0} dx' f(x')$$

dieses V existiert fuer stetige f. Im eindimensionalen Fall gilt dann

$$f(x) = -V'(x).$$

$$\Longrightarrow E = T(\dot{x}) + V(x) \text{ erhalten}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}f} = 0, \forall t$$

Konsequenzen aus Energieerhaltung

Reduktion von DGL 2. Ordnung auf DGL 1. Ordnung ist der wichtigste Punkt dieser Vorlesung.

Sei E fest aber beliebig vorgegeben. Dann wissen wissen wir

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)$$
$$\Longrightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - V(x))$$

was eine DGL 1. Ordnung darstellt. Aus der Definition der kinetischen Energie folgern wir die Ungleichung

$$E \geq V(x).$$

es sind also nur diese x erlaubt! Die oben stehende DGL kann mittels TdV geloest werden

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$
$$\Longrightarrow \int_t^{t_0} dt' = \pm \int_x^{x_0} dx' \left(\frac{2}{m}(E - V(x'))\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\Longrightarrow t - t_0 = \pm \int_x^{x_0} dx' \left(\frac{2}{m}(E - V(x'))\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Integrationskonstanten

Seien die Gesamtenergie E, t_0 und die Startposition $x_0 = x(t_0)$ gegeben. Folgern von allgemeinen Aussagen ohne Rechnen

1. $E = V(x_u) \Longleftrightarrow T = 0$ in dem Umkehrpunkt x_u
2. Natuerlich gilt $T(E, V) = E - V$
3. Verbotene Bereiche sind x mit $E < V(x)$, welche sich in einem V-x-Diagramm so erkannt werden koennen, dass
4. Offene Bahnen bedeutet, dass $|x|$ unbeschraenkt dies ist der Bereich unter der E -Kurve, so dass sie im weiteren Verlauf keinen Schnittpunkt mehr mit dieser hat
5. Geschlossene Bahnen, diese sind das Gegenstueck zu den offenen Bahnen und sind periodisch wodurch sie zu Oszillatoren werden