Vorlesungsskript

Analytische Mechanik

gelesen im Sommersemester 2025 von

Prof. Dr. Fabian Heidrich-Meisner

(Institut für Theoretische Physik)
an der Georg-August Universität Göttingen.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript entstand begleitend zur VL Analytische Mechanik im Sommeremester 2024 und wird für das Sommersemester 2025 überarbeitet und angepasst/. Die Erstellung des Skripts wurde mit SQM Mitteln unterstützt.
Bitte beachten Sie: (i) Das Skript befindet sich noch in der Entwicklung, d.h., der Text wird noch weiter ausgebaut werden, (ii) das Skript ersetzt weder den Besuch der VL noch die eigene Lektüre von Lehrbüchern, (iii) wie in jedem neuen Text schleichen sich Fehler ein, die noch ausgemerzt werden müssen.
Die Erfahrung aus den vergangenen Semester hat gezeigt, dass Ihre Auseinandersetzung mit dem Text und Ihre Rückmeldungen wesentlich zum Erfolg beitragen.

Die Inhalte des Skripts, insbesondere auch die Beispiele, sowie die Aufgaben aus den Übungen definieren die Grundlage für die Klausur.
Falls Sie Tippfehler entdecken oder Fragen und Anregungen haben, dann kontaktieren Sie bitte:
Fabian Heidrich-Meisner, heidrich-meisner@uni-goettingen.de
Herzlichen Dank!

Hinweise:

- Es gibt <u>keine</u> Gewähr für Korrektheit!

Fabian Heidrich-Meisner
Göttingen, im April 2025

1 Einführung

Welche physikalischen Systeme werden durch die (nicht-relativistische) klassische Mechanik beschrieben?

- Ensemble von Massepunkten
- Kontinua (als Näherung an die atomare Struktur der Materie)

in Anwesenheit von

- Kräften bzw. unter der Vorgabe von Potentialen
- und für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ (c: Vakuumlichtgeschwindigkeit), d.h. wir betrachten zunächst nur den nicht relativistischen Fall.
- und für makroskopische Längenskalen $\ell_{typ} \gg a_{atomar}$, die größer als atomare Längenskalen sind, auf denen die Quantenmechanik relevant wird.

Die Aufgaben der klassischen Mechanik sind

- das Aufstellen der Bewegungsgleichung (BWGL) für die räumlichen Koordinaten von Massepunkten aus grundlegenden Prinzipien (z.B. Newtons II. Gesetz, Hamiltonsches Prinzip) bei gegebenen Kräften bzw. Potentialen.
- das Lösen dieser Bewegungsgleichungen, was meist nur in Spezialfällen gelingt (gekoppelte harmonische Oszillatoren, Zentralpotential).
- Ausnutzen von Erhaltungsgrößen beim Lösen von BWGLn.
- eine formale Struktur der Beschreibung über Erhaltunsgrößen, Symmetrieen.
- eine Definition von Lösbarkeit und Kriterien dafür.

Es gibt nur wenige exakt lösbare Beispiele, die man kennen muss, aufgrund ihrer physikalischen Relevanz (z.B. Massepunkte im $1/r$ Potential, harmonischer Oszillator). Erhaltungsgrößen spielen in den meisten Fällen eine wichtige Rolle, um diese Lösungen zu erhalten.

1.1 Was ist neu in der Analytischen Mechanik?

Neu ist vor allem der Abstraktionsgrad. Was in der Experimentalphysik noch teils von Situation zu Situation unterschieden wurde, wird möglichst systematisch durchgeführt und auf allgemeinere Prinzipien zurückgeführt. Ein durchgehend auftretendes Muster ist der Übergang von Kräften auf Potentiale, dann der Schritt auf Langrangefunktionen und später auf Hamiltonfunktionen. Alle Zugänge führen für ein gegebenes Problem auf dieselben BWGLn, der Lagrangeformalismus wird die Verallgemeinerung auf Feldtheorien erlauben, der Hamiltonformalismus den Übergang zur Quantenmechanik und die Vielteilchenphysik in der Statistischen Mechanik. Als grundlegenstes Prinzip zur Herleitung von BWGLn werden wir das Hamilton'sche Prinzip kennenlernen.
Aber auch die formale Struktur ist neu, die die Rolle von Erhaltungsgrößen und Symmetrien einschliesst, deren Kenntnis auf exakte Lösungen führen kann (z.B. Bewegung eines Massepunkts im $1/r$ Potential, harmonischer Oszillator, gekoppelte harmonische Oszillatoren). Eine wichtige Rolle spielt in diesem Kontext der Phasenraum, der die Grundlage einiger formaler Aussagen aber auch für nichtlineare Probleme ist, die auf chaotische Dynamik führen.

Wo kommt die Mechanik in der aktuellen Forschung vor?

- Himmelsmechanik, Astro-/Geophysik.
- Fluiddynamik (hier benötigt man allerdings auch schon Thermodynamik).
- Festkörperphysik (z.B. Gitterschwingungen).
- Molekülphysik (z.B. Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade).
- Klassische Vielteilchensysteme (d.h., die klassische statistische Physik).
- Molekulardynamik (eine numerische Methode zur Simulation klassischer Vielteilchensysteme).

1.2 Literatur

Folgende Lehrbücher eignen sich sehr gut zum begleitenden Lesen:

- Fliessbach
- Nolting
- Kuypers

Vertiefende Lektüre:

- Goldstein

Sehr ausführlich ist das Skript von Prof. Kurt Schönhammer Dieses enthält viele schöne weiterfürende Beispiele und Diskussionen.

- K. Schönhammer, Skript zur Analytischen Mechanik: Webpage des Insituts für Theoretische Physik - Forschung - Dort unter Retired professors: Klicken Sie auf Prof. Schönhammers Namen, das Skript finden Sie auf seiner Webpage.

2 Newton'sche Mechanik

Das 2. Newtonsche Axiom sagt aus, dass die Summe aller auf einen Massepunkt der Masse m wirkenden Kräfte $\vec{F}$ gleich der zeitlichen Ableitung seines Impulses $\vec{p}$ ist:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} = \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}). \tag{2.1}$$

Hier nehmen wir an, dass die Masse als Funktion der Zeit erhalten ist. Im allgemeinen sind die Kräfte Funktionen des Ortsvektors $\vec{r}$ und der Zeit t, manchmal auch eine Funktion von $\dot{\vec{r}}$. Im folgenden sind die Kräfte nur Funktionen des Ortsvektors.
Das Ziel ist es, den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ als Lösung der aus Newton II abgeleiteten Bewegungsgleichungen (BWGLn) für die Koordinaten zu bestimmen und freie Konstanten, die die allgemeine Lösung enthalten muss, aus Anfangsbedingungen zu bestimmen, d.h., aus der Vorgabe von

$$\vec{r}(t_0) \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t_0) \tag{2.2}$$

bei einem beliebigen Zeitpunkt t_0. Formal ist das ein Anfangswertproblem (AWP). Zunächst wählen wir kartesische Koordinaten x, y, z, d.h., wir entwickeln den Ortsvektor bezüglich kartesischer Basisvektoren:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\,. \tag{2.3}$$

Solange sich die Kräfte aus mikroskopischen Potentialen ableiten, ist die Dynamik deterministisch. Diesen Fall diskutieren wir zunächst.

2.1 Eindimensionale Systeme

2.1.1 Einführendes Beispiel: Massenpunkt an einer Feder, harmonischer Oszillator ($* * *$)

Wir betrachten einen Massepunkt der Masse m an einer Feder mit Federkonstante k, die entlang der z-Achse um $\Delta\ell$ bezogen auf eine *entspannte* Feder ausgelenkt wird (siehe Abb. 2.1).
Wir verwenden Newton II Glg. (2.1) im eindimensionalen Fall mit der Koordinate $z = z(t)$. Die hier auftretenden Kräfte sind die Federkraft F_k und die Schwerkraft F_g, die durch

$$F_k = k\Delta\ell \quad \text{und} \quad F_g = -mg \tag{2.4}$$

definiert sind. Hier werden nur die z-Komponenten der Kräfte angegeben; in F_g und F_k ist das Vorzeichen in Hinblick auf die Wahl der z Koordinatenachse zu beachten.

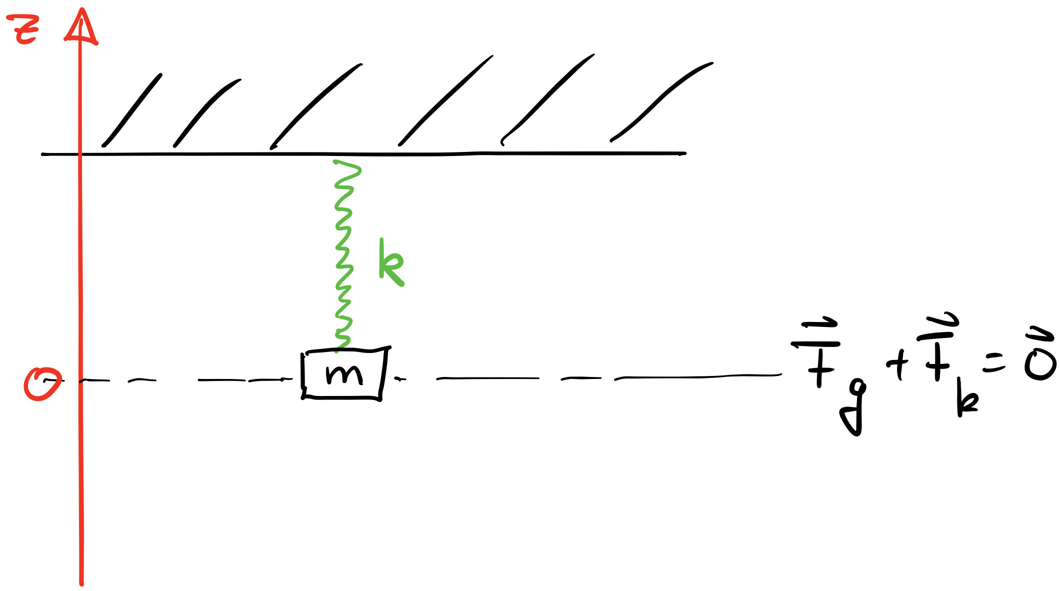


Abbildung 2.1: Massepunkt der Masse m an einer Feder mit Federkonstante k.

Wenn $\Delta\ell > 0$ (Feder ist elongiert), dann wirkt die Federkraft in positive z-Richtung, für $\Delta\ell_0$ in negative z-Richtung.
Um eine möglichst einfache Form der Bewegungsgleichung zu erhalten, wählen wir den Koordinatenursprung so, dass dieser der Ruhelage des Systems entspricht.[1] In der Ruhelage heben sich die im System wirkenden Kräfte gegenseitig auf, weshalb

$$F_g = -F_k \quad \Leftrightarrow \quad F_g + F_k = 0 \tag{2.5}$$

gilt.
Mit dem gewählten Koordinatensystem inkl. -ursprung geben wir die Kräfte als Funktion von z an:

$$F_g = -mg \tag{2.6}$$
$$F_k = k\Delta\ell = k(\Delta\ell_0 - z)\,. \tag{2.7}$$

Dabei ist $\Delta\ell_0$ die Auslenkung der Feder im kräftefreinen Punkt, und wegen Glg. (2.5) gilt:

$$\Delta\ell_0 = \frac{mg}{k}\,. \tag{2.8}$$

Die gesamte Änderung der Länge der Feder ist $\Delta\ell = -z + \Delta\ell_0$ (wieder die Wahl der Koordinatenachse beachten).

[1]Wir diskutieren später, warum das erlaubt ist. Wiederholen Sie die Rechnung mit einer beliebigen Wahl des Koordinatenursprungs $z = 0$, siehe Übungen.

Daraus ergibt sich als BWGL für die Koordinate $z(t)$ der folgende Zusammenhang:

$$m\ddot{z} = -kz \quad \text{also} \quad \ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0\,. \tag{2.9}$$

Mathematisch sind die BWGLn in der Newton'schen Mechanik stets gewöhnliche Differenzialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit, hier für die Funktion $z = z(t)$. Das Argument der gesuchten Funktion $z = z(t)$, die Zeit t, wird in der Regel nicht ausgeschrieben. Es existiert eine eindeutige Lösung für alle Zeiten, falls $z(t_0)$, $\dot{z}(t_0)$ für einen beliebigen Anfangszeitpunkt t_0 gegeben sind.
Im dem hier betrachteten Spezialfall ist die DGL zusätzlich linear, homogen und hat konstante Koeffizienten. Als lineare DGL ist diese DGL homogen, da es keinen Term ohne $z(t)$ oder Ableitungen von $z(t)$ gibt (physikalisch: keine externe, i.a., zeitabhängige Kraft). Für das Lösen dieser Art von Differentialgleichungen (linear, homogen, konstante Koeffizienten) gibt es ein Standard-Lösungsschema. Wir fangen mit dem folgenden Ansatz an:

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{2.10}$$

Wegen $e^0 = 1$ ist z_0 die Anfangsauslenkung aus der Ruhelage bei $t = 0$. Diesen Ansatz setzen wir nun in die gegebene Differenzialgleichung ein. Dafür müssen wir zunächst $z(t)$ zweimal ableiten.

$$\begin{gathered} \dot{z}(t) = \lambda z_0 e^{\lambda t}, \qquad \ddot{z}(t) = \lambda^2 z_0 e^{\lambda t} \\ \left(\lambda^2 + \tfrac{k}{m}\right) z_0 e^{\lambda t} = 0\,. \end{gathered} \quad \textit{Einsetzen} \tag{2.11}$$

Diese Gleichung muss für alle Zeiten t und für beliebige z_0 erfüllt sein, daher folgt:

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m} \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.12}$$

Mit dieser Notation können wir die BWGL für $z = z(t)$ neu hinschreiben:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0\,. \tag{2.13}$$

Diesen Typ einer BWGL bezeichnen wir unabhängig von der physikalischen Realisierung und Bedeutung der Koordinate als die BWGL des eindimensionalen *Harmonischen Oszillators*. ω_0 ist die Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators.

Zurück zur Mathematik. Der Lösungsraum dieser Differenzialgleichung ist ein zweidimensionaler Vektorraum. Daher kann jede beliebige Lösung von Glg. (2.13) als Linearkombinationen zweier Basisfunktionen dargestellt werden. Diese Basisfunktionen nennt man auch Fundamentallösungen der DGL. Dementsprechend muss es zwei freie Parameter geben, um aus der allgemeinen Lösung eine spezielle zu machen und die physikalischen Anfangsbedingungen erfüllen zu können. Die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen, linearen, homogenen Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist

$$\boxed{z(t) = ae^{i\omega_0 t} + be^{-i\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{C}\,.} \tag{2.14}$$

Die beiden Fundamentallösungen sind daher $e^{i\omega_0 t}$ und $e^{-i\omega_0 t}$.

Bemerkung: In der Theorie der linearen, homogenen DGLn mit konstanten Koeffizienten für eine Funktion $z(t)$ führt der Standardansatz Glg. (2.10) auf das Auffinden der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = 0\,. \tag{2.15}$$

Für einfache Nullstellen λ_i ist die zugehörige Fundamentallösung $e^{\lambda_i t}$. Falls es sich um eine m-fache Nullstelle λ_i handelt, dann sind die zugehörigen m Fundamentallösungen $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda_i t}$. Ein Beispiel ist der aperiodische Grenzfall beim gedämpften harmonischen Oszillator.

Zurück zum Beispiel. Bei gegebenen Anfangsbedingungen, d.h., der Vorgabe von Anfangsauslenkung $z(t=0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{z}(t=0)$ lässt sich aus der allgemeinen Lösung ein lineares Gleichungssystem erstellen, um die Parameter a und b zu bestimmen und das vorliegende Problem eindeutig zu lösen. Seien nun für $t_0 = 0$ Anfangswerte gegeben:[2]

$$\begin{aligned} z(0) &= z_0 \quad \text{Anfangsauslenkung} \\ \dot{z}(0) &= v_0 \quad \text{Anfangsgeschwindigkeit} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Daraus erhalten wir durch Einsetzen von $t = 0$ in die allgemeine Lösung Glg. (2.14) das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) für a, b:

$$z(0) = a + b = z_0 \tag{2.17}$$

$$\dot{z}(0) = i\omega_0(a - b) = v_0\,. \tag{2.18}$$

Dieses LGS hat die folgende Lösung:

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(z_0 + \frac{v_0}{i\omega_0}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(z_0 - \frac{v_0}{i\omega_0}\right). \tag{2.19}$$

Setzen wir nun die errechneten Parameter a, b in die allgemeine Lösung Glg. (2.14) ein, erhalten wir die eindeutige Lösung des in Glg. (2.16) definierten Anfangswertproblems (AWP):

$$z(t) = \frac{1}{2}\left(z_0 + \frac{v_0}{i\omega_0}\right)e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}\left(z_0 - \frac{v_0}{i\omega_0}\right)e^{-i\omega_0 t}. \tag{2.20}$$

[2] wir setzen o.B.d.A. $t_0 = 0$.

Ein wichtiger Test ist nun, ob $z(t)$ reellwertig ist oder nicht. Fassen wir also Exponentialfunktionen zu trigonometrischen Funktionen zusammen.

$$z(t) = z_0 \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right) + \frac{v_0}{\omega_0}\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) \tag{2.21}$$

$$= z_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \quad . \tag{2.22}$$

Das passt also, es ergeben sich physikalisch sinnvolle reelle Funktionen $z(t)$. Aber warum rechnen wir, wenn am Ende sowieso etwas reellwertiges steht, trotzdem mit komplexen Exponentialfunktionen? Dies hat mehrere Gründe. Zum einen ist es allgemeiner und mit Exponentialfunktionen lässt sich einfacher arbeiten als mit trigonometrischen Funktionen. Auch beim Arbeiten mit Feldern in der klassischen Feldtheorie und der Quantenmechanik wird sich dieser allgemeine Ansatz auszahlen.
In den Übungen werden Sie das Umformen der Darstellungen diskutieren, aufgrund der linearen Struktur des Lösungsraumes dieser DGL ist das einfach ein Basiswechsel.

Zusammenfassung

Wir extrahieren einige Resultate, die jenseits des Beispiels richtig bleiben. Um allgemein zu sein, schreiben wir für die Koordinate q statt z.

- Die Bewegungsgleichung für einen Massepunkt mit einer Koordinate $q(t)$ ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung in der Zeit.
- Die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichung **muss** (!) zwei freie Konstanten enthalten, diese nennt man *Integrationskonstanten*.
- Es existiert eine eindeutige Lösung der Bewegungsgleichung (unter der Maßgabe, dass die wirkenden Kräfte stetig in ihren Argumenten sind), wenn Anfangsbedingungen der Art $q(t_0)$ und $\dot{q}(t_0)$ gegeben sind.
- Das heißt aber auch, dass die Lösung für alle Zeiten t durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Die klassische Mechanik ist daher deterministisch.

Ende VL 1!

Phasenraum

Wir führen eine neue Idee ein und beschreiben den Zustand eines mechanischen Systems durch Angabe der Koordinaten und Impulse zu einem gegebenen Zeitpunkt t. In unserm Beispiel wäre das $(z(t), m\dot{z}(t))$.
Was verstehen wir unter einem mechanischen System? Das wäre die Zahl der Massepunkte und die gewählten Koordinaten (was die Dimensionalität einschliesst).

Begriffserklärung Phasenraum

Wir ordnen jedem möglichen Zustand eines dynamischen Systems einem Punkt im Phasenraum zu. In unserem Kontext ist das die Menge aller Punkte (z, p_z), d.h., die die räumliche Koordinate z und der zugehörige Impuls $p_z = m\dot{z}$ annehmen können.[a]

[a]Zunächst ist für kartesische Koordinaten klar, was der Impuls ist. Später verallgemeinern wird das für beliebige Koordinaten.

Es ist möglich,[3] eine Differenzialgleichung 2. Ordnung in ein System von zwei Differenzialgleichungen 1. Ordnung zu überführen. Wir illustrieren das am Beispiel der linearen DGL aus Glg. (2.13). Die Größen

$$z(t) := z_1(t) \tag{2.23}$$
$$m\dot{z}(t) := z_2(t) \tag{2.24}$$

fassen wir zu einem Vektor zusammen als

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{z} \\ m\ddot{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Dies lässt sich auf folgende vektorielle Form bringen:

$$\dot{\vec{z}} = \underbrace{A}_{2x2 \text{ Matrix}} \vec{z}, \tag{2.27}$$

wobei die Anfangsbedingung $\vec{z}(t_0)$ dann die Lösung $\vec{z}(t)$ festlegt. In diesem Bild durchläuft $\vec{z}(t)$ als Funktion der Zeit den Phasenraum.

Graphische Interpretation

Gerade in der Hamiltonschen Mechanik wird das Konzept des Phasenraumes wichtig. Hier interessieren wir uns zum Beispiel für den Ort und Impuls eines Teilchens und, wie wir sehen werden, somit für zwei Differenzialgleichungen 1. Ordnung statt einer Differentialgleichung 2. Ordnung.
Weiterhin ist die physikalische Interpretation sowie die Visualisierung des Phasenraumes interessant. Die tatsächlich als Lösung einer BWGL durchlaufenen Punkte im Phasenraum ergeben eine Kurve, die *Phasenraumtrajektorie*. In unserem Beispiel handelt es sich um eine geschlossene Kurve, und zwar eine Ellipse.

[3]In Rechenmethoden und/oder Maphy 1/Diff wurde dies ggf. bereits behandelt.

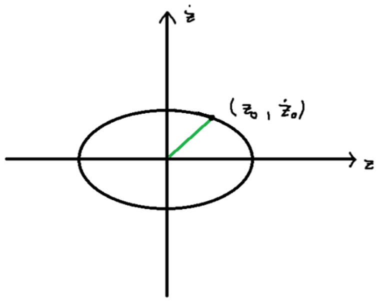


Abbildung 2.2: Die Abbildung zeigt die Kurve der Punkte, die von $\vec{z}(t)$ durchlaufen werden. Für den harmonischen Oszillator ist das eine Ellipse. **[FHM: $\dot{z}$ durch p_z ersetzen.]**

Die Ellipsenform der Kurve können wir aus der Form der Lösungen bei gegebenem z_0, v_0 ablesen:

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \tag{2.28}$$

$$\dot{z}(t) = -\omega_0 z_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t)\,. \tag{2.29}$$

Da es uns nur um die Erklärung der Ellipsenform und nicht um die allgemeinst mögliche Form geht, wählen wir o.B.d.A. für $t = 0$, dass $z(0) = z_0$ und $\dot{z}(0) = 0$. Setzen wir dies nun ein, erhalten wir

$$\left(\frac{z(t)}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{p_z(t)}{z_0 m \omega_0}\right)^2 = \cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1\,, \tag{2.30}$$

was einer Ellipsengleichung mit Halbachsen $a = z_0$ und $b = z_0 m \omega_0$ entspricht:

$$\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{b}\right)^2 = 1\,. \tag{2.31}$$

Energie als Erhaltungsgröße

Wir haben bereits geklärt, warum rein mathematisch Ellipsen als Trajektorien im Phasenraum zu erwarten sind. Die physikalische Bedeutung hinter den Ellipsen ist ein wenig spannender: Die Ellipsen sind die Linien konstanter Gesamtenergie!
Schauen wir uns das genauer an: Ist die Gesamtenergie konstant (in unserem Beispiel gibt es nur die potentielle und kinetische Energie) arbeiten wir bekanntlich in einem konservativen System. Für unser Beispiel eines harmonischen Oszillators trifft das zu, denn die Federkraft lässt sich durch ein Potential $V(z)$ darstellen[4]

$$F_k = -kz = -V'(z). \tag{2.32}$$

[4] Wie in der VL gezeigt, kann der Beitrag des Schwerkraftpotentials durch eine Koordinatentransformation $z' = z - z_0$ absorbiert werden.

Das Potential ist nun durch

$$\boxed{V(z) = \tfrac{1}{2}kz^2}$$

gegeben.[5] Die Gesamtenergie E ist durch

$$E = T(\dot{z}) + V(z) \tag{2.33}$$

d.h., die Summe aus der kinetischen T und der potentiellen Energie V gegeben. Die kinetische Energie für eine kartesische Koordinate kennen wir:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2\,. \tag{2.34}$$

Wir fassen E als auf dem Phasenraum definierte Funktion von $p_z = m\dot{z}, z$ auf:

$$E(z, p_z) = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2\,. \tag{2.35}$$

Wir suchen diejenigen Punkte (z, p_z), die zu fester aber beliebiger Energie E_0 gehören, d.h.,

$$E(z, p_z) = E_0\,. \tag{2.36}$$

Teilt man nun in Glg. (2.36) durch E_0 und formt geeignet um, denn steht wieder eine Ellipsengleichung da:

$$\left(\frac{p_z}{\sqrt{2E_0 m}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2E_0/k}}\right)^2 = 1\,. \tag{2.37}$$

Wir machen uns noch klar, dass die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße ist, d.h., wir zeigen

$$\frac{dE}{dt} = 0\,. \tag{2.38}$$

Durch Auswerten der totalen Ableitung nach der Zeit erhalten wir (m =const.):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_z}\dot{p}_z + \frac{\partial E}{\partial z}\dot{z} = \dot{p}_z\frac{p_z}{m} + kz\dot{z} = \dot{z}(m\ddot{z} + kz) = 0\,, \tag{2.39}$$

wobei wir in der letzten Zeile die BWGL $m\ddot{z} + kz = 0$ des Systems verwenden.[6]

Merken

Das heißt im Umkehrschluss, dass Erhaltungsgrößen die erlaubten Trajektorien im Phasenraum einschränken! In diesem speziellen Beispiel werden die möglichen Zustände in der ganzen Ebene auf die Zustände auf Ellipsen eingeschränkt (von zweidimensional auf eindimensional).

[5]Das Potential ist nur bis auf eine Integrationskonstante V_0 eindeutig festgelegt.
[6]Diese Aussage zeigen wir später allgemein für konservative Kräfte.

Zusammenfassung

- Begriff des Phasenraums und des Zustandes eines mechanischen Systems mit einer Koordinate und einem Massepunkt.
- Auf dem Phasenraum ist es zweckmässig, die BWGL als Systeme von DGLn erster Ordnung darzustellen. Dies ist äquivalent zur Darstellung über Newton II (eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung). Die Zahl der Integrationskonstanten ändert sich nicht.
- Phasenraumtrajektorien des ungedämpften 1D harmonischen Oszillators sind geschlossene Bahnen und zwar Ellipsen.
- Die Linien konstanter Gesamtenergie für den ungedämpften 1D harmonischen Oszillators sind Ellipsen.
- Erhaltungssätze schränken die durch die klassische Dynamik erreichbaren Zustände im Phasenraum ein.
- Die Verwendung von DGLn 1. Ordnung ist der Startpunkt für Standard-Numerik Verfahren, z.B. das Eulerverfahren.
- Ausblick: Der Hamiltonformalismus wird auf Systeme von DGLn 1. Ordnung führen.

2.1.2 Einschub: Eulerverfahren ($*$)

Einige physikalische Probleme werden durch analytisch lösbare Differenzialgleichungen beschrieben oder lassen sich so vereinfachen, dass dies möglich ist. Im allgemeinen ist das nicht gegeben. Dann versucht man, die Probleme zumindest numerisch und eben nicht mehr analytisch zu lösen. Im computergestützten wissenschaftlichen Rechnen (CWR) werden Sie numerische Lösungsverfahren sowie Fehlerabschätzung oder Stabilitätsanalysen noch detailreich durchnehmen. An dieser Stelle wird auf eines der grundlegendsten numerischen Lösungsverfahren eingegangen, auf welchem viele Verallgemeinerungen basieren. Es handelt sich um das *Eulerverfahren*.
Sei dafür ein System aus Differenzialgleichungen erster Ordnung gegeben:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad \text{wobei} \quad \vec{x} = \vec{x}(t). \tag{2.40}$$

Wir nehmen an, dass $\vec{x}(t)$ ein reeller Vektor ist. Durch den Kontext der Mechanik motiviert, betrachten wir die Zeit als Argument; das Verfahren gilt jedoch für beliebige Funktionen einer Veränderlichen. Das Aufstellen eines numerischen Verfahrens für eine gewöhnliche DGL involviert in der Regel zwei Schritte.

- **Schritt 1**: Im ersten Schritt diskretisieren wir die Zeitachse. Eine Diskretisierung des Arguments der betrachten Funktion ist in praktisch allen numerischen Verfahren notwendig. Wir ersetzen für $t \in [0, t_{\max}]$

$$t \to t_i = i\Delta t \quad , \quad i = 0, \ldots, N \,, \tag{2.41}$$

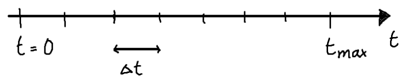


Abbildung 2.3: Δx ist die Intervalllänge, N die Intervallanzahl zwischen 0 und $t_{\max}$. Der Zeitpunkt ist gegeben durch $t_i = i \cdot \Delta t$ mit $i = 0, ..., N$. Der Einfachheit halber schreiben wir $\vec{x}(t_i) = \vec{x}_i$.

wobei Δt der Zeitschritt ist und $t_{\max} = N\Delta t$. Von diesem Parameter wird die numerische Genauigkeit und Stabilität des Verfahrens abhängen.[7] Aufgrund der Diskretisierung der Zeitachse nimmt auch die gesuchte Funktion $\vec{x}(t)$ nur noch diskrete Werte an:

$$\vec{x}_i := \vec{x}(t_i)\,. \tag{2.42}$$

Wir realisieren, dass derartige numerische Verfahren generisch Folgen $i \mapsto \vec{x}_i$ produzieren. Die aus der Mathematik bekannten Konzepte und Definitionen der Konvergenz von Folgen sind hier anwendbar.

- **Schritt 2:** Im zweiten Schritt approximieren wir alle Ableitungen durch ihre Differenzenquotienten. Die einfachst mögliche Näherung ist:

$$\dot{\vec{x}} \approx \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i}{\Delta t}\,. \tag{2.43}$$

Wir erhalten die folgende Vorschrift für das Eulerverfahren, die den Wert $\vec{x}_{i+1}$ aus $(t_i, \vec{x}_i)$ generiert:

$$\boxed{\Rightarrow \quad \vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t\, \vec{f}(\vec{x}_i, t_i)\,. \tag{2.44}}$$

Dieser kleine Einschub ist nur dafür da, dass Sie von numerischen Lösungsverfahren schon mal etwas gehört haben. In der Übung werden Sie das Eulerverfahren einmal auf den harmonischen Oszillator anwenden und die Ergebnisse im Phasenraum plotten. Letzteres entspricht ca. zehn Zeilen Code in Python.

Ende VL 2

[7] Stabilität bezieht sich darauf, dass bei für manche Verfahren physikalisch falsche Lösungen mit beliebig großen Werten der Funktion $|\vec{x}|$ entstehen können, also instabile Lösungen.

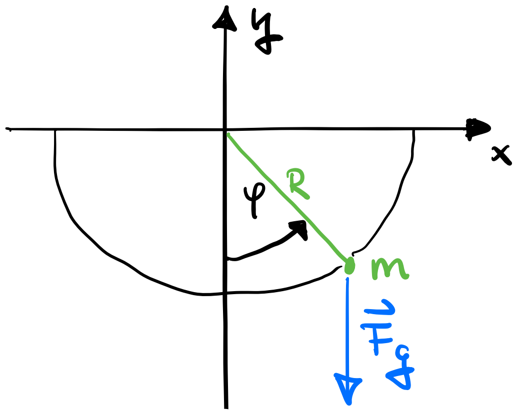


Abbildung 2.4: Die Abbildung zeigt einen Massepunkt der Masse m auf einer Kreisbahn mit Radius R. Dies realisiert das mathematische Pendel.

2.1.3 Zum Selberlesen: Mathematisches Pendel

Hinweis: Dieses Kapitel ist zum Selberlesen gedacht, dient als Vorbereitung auf Blatt P2 und HA2 und enthält Teile der Lösungen der in den Übungen behandelten Aufgaben von Blatt P2 und HA2.
Das mathematische Pendel ist Ihnen bereits aus der Experimentalphysik bekannt. Wir diskutieren dieses wichtige Problem in Hinblick auf folgendes:

- Als Beispiel für einen nicht-linearen Oszillator.
- Als Beispiel für die Reduktion eines zweidimensionalen Systems auf ein eindimensionales System durch das Vorliegen einer Zwangsbedingung.
- Als Beispiel für die Verwendung von krummlinigen Koordinaten.
- Als Beispiel für das Aufstellen der Newton'schen BWGL in krummlinigen Koordinaten (siehe HA2).
- Als Beispiel für Phasenraumtrajektorien in Abhängigkeit von der Amplitude der Schwingung (siehe Blattt P2 und HA2).

Es sei gegeben ein Massepunkt der Masse m in einem zweidimensionalen Raum mit dem Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Der Massepunkt bewegt sich auf dem Rand eines Kreises für alle Zeiten t (siehe Abb. 2.4). Daher gilt

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \forall t\,. \tag{2.45}$$

Diese Gleichung stellt eine *Zwangsbedingung* an die Bewegung des Massepunkts dar.

Begriffserklärung: Zwangsbedingung

Unter einer Zwangsbedingung versteht man die Einschränkung der Freiheitsgrade eines Systems. Rein mathematisch ist die Zwangsbedingung eine Gleichung, in der die Koordinaten auftreten.[a] Effektiv bewirkt eine Zwangsbedingung die Reduktion der Zahl der unabhängigen Koordinaten (bez. der Zahl Freiheitsgrade) des Systems um eins. Zwangsbedingungen sind keine BWGLn, müssen aber zu allen Zeiten von der physikalische Lösung erfüllt sein. In den Zwangsbedingungen, die wir meistens behandeln werden, treten keine zeitlichen Ableitungen der Koordinaten auf, sondern nur die Koordinaten selber.

[a] Allgemein auch die Zeit, siehe spätere Diskussion.

Die Summe der hier wirkenden Kräfte ist in diesem Fall nur die Schwerkraft. Das Problem lässt sich offenbar in der Ebene formulieren, daher nimmt die Schwerkraft diese Form an:

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \vec{F}_g = -mg\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

Die zusätzliche Glg. (2.45) reduziert das Problem nun auf eine eindimensionale Situation, d.h., die beiden Koordinaten x, y sind nicht unabhängig durch 4 Anfangsbedingungen festlegbar. Wir suchen jetzt geeigente Koordinaten, die die Zwangsbedingung automatisch erfüllen. Da sich der Massepunkt s auf einer Kreisbahn bewegt, liegt es nahe, einen Winkel φ zur Parametrisierung der in der Zwangsbedingung gegebenen Kurve zu verwenden. Dieser Winkel ist ein erstes Beispiel für eine *generalisierte Koordinate*, die so gewählt wird, dass Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind. Formal sind wir zu ebenen Polarkoordinaten (r, φ) übergegangen:

$$x = r\sin\varphi \tag{2.47}$$
$$y = -r\cos(\varphi)\,. \tag{2.48}$$

Dabei stellt φ den Auslenkungswinkel der Masse aus der Ruhelage dar. Üblicherweise wählt man in diesem Problem φ so, dass $\varphi = 0$, wenn der Massepunkt bei $(0, -R)$ ist, und versieht Auslenkungen nach rechts mit dem positiven Vorzeichen. Dann gilt $\varphi \in [-\pi, \pi)$.[8] Der Abstand vom Koordinatenursrprung ist jedoch konstant, so dass

$$r = R\,, \tag{2.49}$$

was die Zwangsbedingung automatisch erfüllt. r hat also keine Dynamik!

Wir versuchen und die Bewegungsgleichung für φ zu erstellen. Die Herleitung der Bewegungsgleichung geschieht hier geometrisch und im nächsten Schritt als Beispiel für das Aufstellen von BWGLn aus Newton II in krummlinigen Koordinaten. Später führen wir das ganze dann formal im Rahmen des Lagrangeformalismus I durch.

[8] Andere Definitionen des Wertebereichs von φ sind möglich, aber für dieses Problem ungünstig. Überlegen Sie sich, warum!

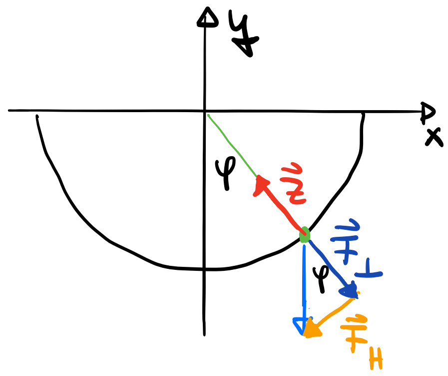


Abbildung 2.5: In der Abbildung eingezeichnet sind die Kräfte, die auf den um φ ausgelenkten Massenpunkt wirken: Schwerkraft $\vec{F}_g$ und Zwangskraft $\vec{Z}$. Die Schwrkraft wird in zwei Komponenten $\vec{F}_\parallel$ und $\vec{F}_\perp$ zerlegt.

Ein häufiger Trick beim Arbeiten mit vektoriellen Größen ist es, den Vektor als Linearkombination zu schreiben. Diesem Prinzip folgend zerlegen wir die Schwerkraft in eine senkrechte und eine parallel zum Kreisbogen wirkende Komponente (siehe Abb. 2.5)

$$\vec{F}_g = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp, \tag{2.50}$$

wobei $\vec{F}_\perp$ hier die *Zwangskraft* $\vec{Z}$ kompensiert, welche den Massepunkt auf der Kreisbahn hält. In unserem Beispiel können wir uns einen Stab vorstellen, der den Ursprung mit dem Massepunkt verbindet und der die Zwangskraft auf den Massepunkt ausübt. Mehr zu Zwangskräften im Kapitel zum Lagrangeformalismus.
Die parallele Kraftkomponente $\vec{F}_\parallel$ wirkt tangential zum Kreisbogen und entlang des Einheitsvektors $\vec{t}_\parallel$. Diese Komponente ist für die tatsächliche Beschleunigung der Masse auf der durch die Zwangsbedingung gegebenen Bahn verantwortlich. Üblicherweise führt man jetzt die Bogenlänge s ein, die mit dem Winkel φ so zusammenhängt (R sei der Radius des Kreises):[9]

$$s = R\varphi\,. \tag{2.51}$$

Bei einer positiven Auslenkung in s-Richtung wirkt als Rückstellkraft $\vec{F}_\parallel$. Dieser Vektor ist (anti-)parallel zum Vektor $\vec{ds}$, der die Änderung von s nach Betrag und Richtung beschreibt. Damit können wir Newton II so hinschreiben:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin(\varphi) = 0. \tag{2.52}$$

Die Masse kürzt sich heraus.[10] Dies ist nichts anderes, als die Beschreibung des *ma-*

[9] Vorzeichen beachten: hier positiver Winkel, positive Bogenlänge.
[10] Experimentell: Schwere gleich träger Masse.

thematischen Pendels, diese BWGL für $\varphi = \varphi(t)$ ist wegen des $\sin(\varphi)$ im allgemeinen nicht-linear.[11]

Ziel für die Analytische Mechanik

Ein wichtiges Ziel für den Verlauf des Kurses ist das Aufstellen eines allgemeinen und eleganten Verfahrens, um für derartige Probleme Bewegungsgleichungen aufzustellen, wenn *generalisierte Koordinaten* bekannt sind. Dieses Verfahren lernen wir in Form des Lagrangeformalismus kennen.

Bemerkung: Für kleine Auslenkungen $s \ll R$ ergibt sich aus Glg. (2.52) mit $\sin(\varphi) \approx \varphi$ wieder ein harmonischer Oszillator, im Grenzfall *kleiner Schwingungen*:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0\,; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}\,. \tag{2.53}$$

Bemerkung: Auch für das mathematische Pendel gilt Energieerhaltung, weil das Schwerefeld konservativ ist. Die Gesamtenergie in kartesischen Koordinaten lautet:

$$E(\dot{x}, \dot{y}; x, y) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy\,. \tag{2.54}$$

Wir ersetzen x, y durch die generalisierte Koordinate φ:

$$E(\dot{\varphi}, \varphi) = T(\dot{\varphi}) + V(\varphi) \tag{2.55}$$

$$= \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 - mg\cos(\varphi)\,. \tag{2.56}$$

Die möglichen Trajektorien im Phasenraum der Zustände $(\varphi, \dot{\varphi})$ können wir wieder aus der folgenden Gleichung (E_0 fest aber beliebig) bestimmen:[12]

$$E(\dot{\varphi}, \varphi) = E_0\,. \tag{2.57}$$

Abhängig von E_0 in Relation zu $E_{typ} = 2mgR$ ergeben sich unterschiedliche, durch E_0 parametrisierte Kurvenscharen,[13] die wir z.B. numerisch aus Glg. (2.57) bestimmen können, <u>ohne</u> die BWGL lösen zu müssen. Da die BWGL nicht-linear ist, illustriert diese Beispiel die Nützlichkeit von Erhaltungsgrößen!

Herleitung der BWGL aus Newton II): Nun machen wir die Rechnung zur Herleitung von Glg. (2.52) nochmal eleganter. Jetzt wenden wir Newton II auf die Projektion der Schwerkraft auf den tangentialen Einheitsvektor $\vec{t}_\parallel$ an. Dieser ist in jedem Punkt

[11] Häufig findet sich diese Gleichung mit ℓ (Länge ℓ des Stabs) statt R.

[12] Streng genommen müssten wir die Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ durch den zugehörigen verallgmeinerten Impuls ersetzen. Das erfolgt im Lagrangeformalismus, für die Form der Phasenraumtrajektorien in diesem Beispiel ist das unwichtig.

[13] Achtung: E_0 parametrisiert die Kurvenschar, nicht einzelne Phasenraumtrajektorien)

auf der Bahn als Funktion von φ festgelegt und zeigt in die Richtung der Änderung von φ. Mit unserer Definition von φ gilt:

$$\vec{t}_{\parallel} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} . \tag{2.58}$$

Damit erhalten wir:

$$\vec{F}_g \cdot \vec{t}_{\parallel} = (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}) \cdot \vec{t}_{\parallel} = \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{t}_{\parallel} \tag{2.59}$$

$$-mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{t}_{\parallel} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{t}_{\parallel} \tag{2.60}$$

Nun errechnen wir $\ddot{\vec{r}}$, indem wir komponentenweise nach der Zeit ableiten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = R\dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = R\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + R\dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

Setzen wir dieses Zwischenergebnis nun wieder in Glg. (2.60) ein, so folgt aus

$$\vec{t}_{\parallel} \cdot \ddot{\vec{r}} = R\ddot{\varphi}, \tag{2.64}$$

dass

$$R\ddot{\varphi} = -g \sin(\varphi) \tag{2.65}$$

beziehungsweise Glg. (2.52).

A Lösungen zu ausgewählten Übungsaufgaben

A.1 Lösung zu Präsenzblatt 1

Einführung zu Differentialgleichungen

- Ein wesentliches Ziel der Analytischen Mechanik ist das Aufstellen von Bewegungsgleichungen (BWGL) für die Koordinaten eines Massepunkts. Wenn man diese BWGLn hat, dann handelt es sich um gewöhnliche Differentialgleichungen für die Koordinaten als Funktion der Zeit. In diesem Aufgabenblatt geht es um einige essentielle Lösungsverfahren.

- Im Laufe des Kurses werden wir im wesentlichen 2 Lösungsverfahren für gewöhnliche DGLn für Funktionen $y = y(x)$ verwenden:[1]
  - für bestimmte DGLn 1. Ordnung die Methode der Trennung der Veränderlichen.
  - für lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten den Lösungsansatz

$$y = y(x) = e^{\lambda x}\,. \tag{A.1}$$

- Bei linearen DGLn für eine Funktion $y = y(x)$ unterscheiden wir den homogenen Fall ($y^{(\ell)}$ ist die ℓ-te Ableitung von y nach x, $y^{(0)} = y$ die Funktion selber):

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell(x) y^{(\ell)}(x) = 0 \tag{A.2}$$

  und den inhomogenen Fall mit einer Funktion $g = g(x)$:

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell(x) y^{(\ell)}(x) = g(x)\,. \tag{A.3}$$

  Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGL n-ter Ordnung ist stets die Summe der allgemeinen Lösung y_h der homogenen DGL (mit n Integrationskonstanten) und einer partikulären Lösung y_{ih} der inhomogenen DGL:

$$y = y_h + y_{ih}\,. \tag{A.4}$$

  Die partikuläre Lösung ist nicht eindeutig.

- Für homogene lineare DGLn gilt:
  - Ist $y = y(x)$ eine Lösung, dann ist auch $\tilde{y} = cy$ eine Lösung (c ist eine Konstante und kann im allgemeinen komplex sein).
  - Sind y_1 und y_2 Lösungen, dann ist auch $\tilde{y} = y_1 + y_2$ eine Lösung.

  Daher hat der Lösungsraum einer homogenen linearen DGL n-ter Ordnung die Struktur eines n-dimensionalen Vektorraums.

[1] Wir verwenden hier die in der Mathematik übliche Notation, für uns wird es sich meist um zeitabhängige Funktionen drehen.

- Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen DGL n-ter Ordnung muss n freie Parameter haben, die wir Integrationskonstanten nennen. Die Lösung wird eindeutig (Details siehe Mathematik), wenn Anfangsbedingungen vorgeben werden, die die Integrationskonstanten festlegen.

A.1.1 Lösung zu Aufgabe P1.1: Trennung der Veränderlichen

Die Methode der Trennung der Veränderlichen (TdV) ist auf DGLn 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(y)g(x) \tag{A.5}$$

anwendbar. Wir schreiben $y' = dy/dx$ und formen um:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx\, g(x)\,. \tag{A.6}$$

Wenn man beide Integrale berechnen kann und nach y auflösen kann, hat man eine geschlossene und explizite Lösung. Beachten Sie, dass es genau eine Integrationskonstante in einer DGL 1. Ordnung geben muss.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLn für $y = y(x)$ mit Hilfe der Methode der Trennung der Veränderlichen.
Hinweis: Verwenden Sie bei b) die Methode *Variation der Konstanten* zum Auffinden einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL. Dies bedeutet, dass Sie erst die Lösung der homogenen DGL angeben, die eine Integrationskonstante C enthält. Dann bestimmen Sie eine partikuläre Lösung, indem Sie als Lösungsansatz die homogene Lösung mit $C = C(x)$ ansetzen. Dies ergibt eine DGL für $C = C(x)$.

a) $xy^2 - e^x y' = 0\,.$

Lösung:

$$\begin{aligned}
xy^2 - e^x \frac{dy}{dx} &= 0 \\
xy^2 &= e^x \frac{dy}{dx} \\
\frac{x}{e^x} dx &= \frac{dy}{y^2} \\
\int \frac{x}{e^x} dx &= \int \frac{dy}{y^2} \\
\int \frac{x}{e^x} dx &= \int \frac{dy}{y^2} \\
-\frac{1+x}{e^x} + C &= -\frac{1}{y} \\
y &= \frac{e^x}{x+1-Ce^x} = \frac{1}{(x+1)e^{-x} - C}
\end{aligned}$$

Note that a general choice of C and x allows the denominator to be 0. We must therefore restrict x such that $(x+1)e^{-x} - C \neq 0$.

b) $y' = 4y - x^2$.

Lösung: Die DGL ist 1. Ordnung, linear, und inhomogen. Zuerst bestimmen wir die Lösung der homogenen DGL mit Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dy_h}{dx} = 4y_h \quad \Rightarrow \quad y_h = Ce^{4x}\,.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL erhalten wir mit der Methode der Variation der Konstanten, d.h., wir verwenden die Lösung der homogenen DGL mit der Modifikation $C \to C(x)$. Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 4y - x^2 \\
\frac{d}{dx}(C(x)e^{4x}) &= 4C(x)e^{4x} - x^2 \\
4C(x)e^{4x} + C'(x)e^{4x} &= 4C(x)e^{4x} - x^2 \\
C'(x)e^{4x} &= -x^2 \\
C'(x) &= -x^2e^{-4x} \\
C(x) &= -\int x^2e^{-4x}dx = \frac{8x^2+4x+1}{32}e^{-4x} + C_2 \\
y &= \frac{8x^2+4x+1}{32} + C_2e^{4x}
\end{aligned}$$

Am Ende können wir die eine Integrationskonstante beliebig umbenennn. Beachten Sie jeweils den möglichen Wertebereich der Integrationskonstanten.

A.1.2 Erzwungene Schwingungen beim harmonischen Oszillator

Betrachten Sie den angetriebenen, gedämpften harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)\,. \tag{A.7}$$

Hierbei handelt es sich um eine inhomogene, lineare DGL 2. Ordnung für die Funktion $x = x(t)$.

a) Ermitteln Sie für $0 < \gamma < \omega_0$ (Schwingfall) die allgemeine Lösung von Gl. (A.7) für folgende Funktionen $f(t)$.

Hinweis: beachten Sie, dass die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGL stets die Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL ist. In dieser Aufgabe müssen Sie daher erst einmal die homogene DGL allgemein lösen und dann für jedes $f(t)$ eine partikuläre Lösung finden.

i. $f(t) = a = const$: Raten Sie eine partikuläre Lösung!

Lösung:
Um die inhomogene DGL

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a$$

allgemein zu lösen, bestimmen wir erst die allgemeine Lösung x_h der homogenen DGL und dann eine spezielle Lösung x_{ih} der inhomogenen DGL. Die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist dann:

$$x = x_h + x_{ih}\,. \tag{A.8}$$

Lösung der homogenen DGL:

$$\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

Wir machen den Standardansatz für homogene lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten:

$$x_h(t) = Ce^{\lambda t}$$

Einsetzen in die homogene DGL ergibt:

$$C\lambda^2 e^{\lambda t} + 2C\gamma\lambda e^{\lambda t} + C\omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

$C = 0$ ist die triviale Lösung, diese schliessen wir aus.[2] Der obige Ausdruck verschwindet nur für alle t, wenn:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Wir betrachten den Schwingfall ($\gamma < \omega_0$) und schreiben dann:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,. \tag{A.9}$$

Damit ergeben sich zwei Fundamentallösungen der homogenen DGL:

$$x_{h,1}(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-\gamma t + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t}; \quad x_{h,2}(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t}$$

die beides oszillierende Lösungen sind, mit einer exponentiellen Dämpfung. Die Eigenfrequenz des gedämpften Oszillators ist:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,. \tag{A.10}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist die Linearkombination der beiden Fundamentallösungen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$:

$$x_h(t) = C_1 x_{h,1}(t) + C_2 x_{h,2}(t)\,. \tag{A.11}$$

[2] Daher kann man die Konstante auch von vornehrein in der Rechnung weglassen!)

Bemerkung: Es gibt mehrere gleichwertige Möglichkeiten, die allgemeine Lösung anzugeben (siehe HA1):

$$x_h(t) = C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \tag{A.12}$$
$$x_h(t) = e^{-\gamma t}\left(\tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t)\right) . \tag{A.13}$$

Durch Angabe von Anfangsbedingungen ergibt sich stets dieselbe eindeutige Lösung!

Weitere Übung: Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen DGL auch für den aperiodischen Grenzfall ($\gamma = \omega_0$) und den überdämpften Fall (Kriechfall, $\gamma > \omega_0$) an.

Für die inhomogene rechte Seite $f(t) = a$ können wir raten, dass $x_{ih}(t) = C_3$ mit einer Konstanten C_3. Einsetzen ergibt:

$$\ddot{x}_{ih} + 2\gamma \dot{x}_{ih} + \omega_0^2 x_{ih} = a \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 C_3 = a \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{a}{\omega_0^2} .$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist daher:

$$x(t) = x_h(t) + x_{ih}(t) = e^{-\gamma t}\left[C_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t}\right] + \frac{a}{\omega_0^2} . \tag{A.14}$$

Die Konstanten C_1 und C_2 sind im allgemeinen komplex, für eine physikalisch sinnvolle Lösung für vorgegebene *reelle* Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$ jedoch reell (siehe Hausaufgabenblatt 1).

Wir lernen daran, dass eine konstante Kraft, die auf den Oszillator wirkt, durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs kompensiert werden kann. Siehe auch HA1 am Beispiel der Masse an einer Feder im konstanten Schwerefeld.

ii. $f(t) = f_0 \mathrm{Re}(e^{i\omega t})$ (f_0 und ω reell): verwenden Sie den Ansatz $x(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}_0 e^{i\omega t})$; $\hat{x}_0$ komplex. Rechnen Sie bei ii. mit komplexen Funktionen, d.h., lassen Sie die Realteilbildung weg, und bestimmen Sie Amplitude und Phase der partikulären Lösung als Funktion von ω, ω_0 und γ. Skizzieren Sie $|\hat{x}_0|$ und die Phasenverschiebung als Funktion von ω.

Lösung:

Da die Realteilbildung eine lineare Operation ist, vertauscht diese mit den (ebenfalls linearen) Ableitungen und wir können zunächst komplex rechnen und den Realteil am Ende nehmnen. Einsetzen dieses Ansatzes $x(t) = \hat{x}_0 e^{i\omega t}$ mit komplexem $\hat{x}_0$ in die DGL ergibt:

$$(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2)\hat{x}_0 e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t},$$

was für beliebige Zeiten nur erfüllt ist, wenn

$$(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2)\hat{x}_0 = f_0$$

Die komplexe Amplitude ist also:

$$\hat{x}_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}.$$

Die reelle Amplitude ist daher:

$$|\hat{x}_0| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}.$$

Die Phasenverschiebung zwischen Antrieb und Oszillator ist dann (beachte $\hat{x}_0 = |\hat{x}_0| e^{i\varphi}$):

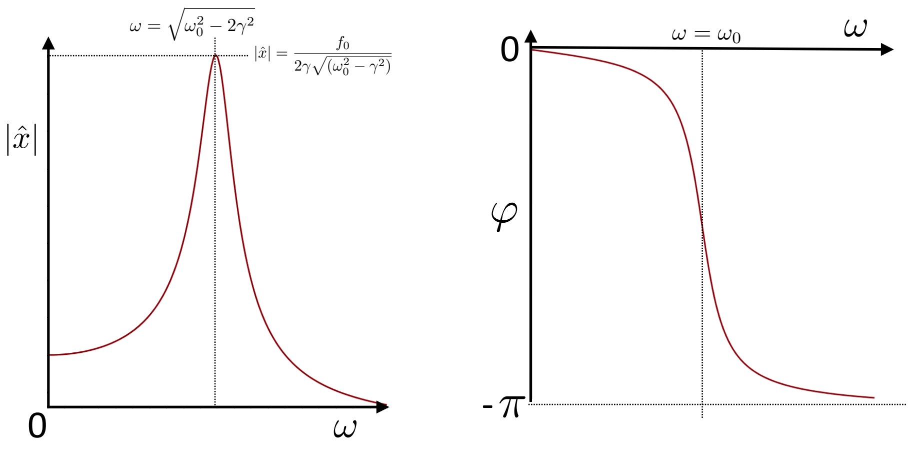
$$\varphi = \arg(\hat{x}_0) = -\arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Die gesuchte partikuläre Lösung ist:

$$x_{ih}(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}_0 e^{i\omega t}) = |\hat{x}_0| \cos(\omega t + \varphi)$$

mit den oben angegebenen Ausdrücken für $|\hat{x}_0|$ und φ.

Skizze:



b) Bestimmen Sie für i. die Lösung des AWP $x(0) = x_0; v(0) = 0$.

Lösung:

Wir gehen aus von (einer Form) der allgemeinen Lösung, z.B.:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right] + \frac{a}{\omega_0^2}\,. \tag{A.15}$$

Für $x(0) = x_0$ und $v(0) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
x(0) &= e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) + \frac{a}{\omega_0^2} = x_0 \\
C_1 &= x_0 - \frac{a}{\omega_0^2} \\
v(0) &= \dot{x}(0) = -\gamma e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) + \omega e^0(C_1 \sin(0) - C_2 \cos(0)) = 0 \\
&= -\gamma C_1 - \omega C_2 = 0 \\
C_2 &= -\frac{\gamma}{\omega} C_1 = -\frac{\gamma}{\omega}\left(x_0 - \frac{a}{\omega_0^2}\right)
\end{aligned}$$

Durch die Angabe der Konstanten C_1 und C_2 ist die Lösung eindeutig festgelegt.