Universität Göttingen, Institut für Theoretische Physik
Rechenmethoden der Physik, WiSe 2024/25
Dozent: Prof. Dr. S. Schumann

Vorlesungswoche 11.11.–15.11.2025

# Übung 2: Differentiation und Reihen

## 1. Differentiation

**a)** Es seien $f$ und $g$ auf $\mathbb{R}$ definierte, stetige und einmal differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie unter Annahme der Produkt- und der Kettenregel die Quotientenregel

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}. \tag{1}$$

**b)** Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Ableitungen:

(i) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$,

(ii) $f(x) = (\ln(x))(\ln(\ln(x))) - \ln(x)$.

## 2. Potenzreihen

**a)** Stellen Sie die folgende Funktion als Potenzreihe um $x_0 = 2$ dar:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}. \tag{2}$$

Welcher Konvergenzbereich ergibt sich? *Hinweis:* Formen Sie $f(x)$ so um, dass Sie die bekannte Potenzreihe der geometrischen Reihe einsetzen können.

**b)** Die Potenzreihen für die Exponential- und die Cosinusfunktion lauten

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{und} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Leiten Sie aus der Potenzreihe für $\cos(x)$ die Potenzreihe für die Sinusfunktion ab.

**c)** Man bestimme aus den Potenzreihen für $\mathrm{e}^x$ und $\sin(x)$ die Potenzreihe um $x_0 = 0$ für $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ bis einschließlich zur fünften Potenz, d.h. bis zum $c_5 x^5$-Term.

## 3. Taylorreihe

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklungen um $x_0 = 0$ für die folgenden Funktionen:

(i) $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ bis einschließlich zur Ordnung $x^2$.

(ii) $f_2(x) = e^{x^2+4x-3}$ bis einschließlich zur Ordnung $x^3$,

(iii) $f_3(x) = x^4 - 3x^3 + 7x - 1$ bis einschließlich zur Ordnung $x^4$.

Erstellen Sie einen Graph für eine der Funktionen und vergleichen Sie ihn mit Graphen für die entsprechende Taylor-Entwicklung bis zur nullten, ersten, zweiten, ... Ordnung. Was können Sie beobachten?