Arbeit, Leistung, Energie

Arbeit ist ein Skalarprodukt von der Kraft und dem Weg.

Leistung ist die Ableitung der Arbeit nach der Zeit.

Energie ist eigentlich das Gleiche wie die Arbeit.

Beispiele: Flaschenzug, Schraege Rampe

Wegunabhaengige Arbeit und konservative Kraftfelder

- Falls $W_a = W_b$ fuer beliebige Wege a, b, ist das Weg-Integral **wegunabhaengig** und das Kraftfeld **konservativ**.

aequivalent dazu sind folgende Aussagen:

- $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$

Einschub: der Nabla-Operator ∇

$$\nabla = \left\{ \frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z} \right\}$$

partielle Ableitung

1. **Gradient** (Anwendung auf ein Skalar)

   $$\nabla f = \text{grad } f = \left\{ \frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z} \right\}$$

   Der Gradient gibt die Richtung der groessten Aenderung von f an

   der Gradient steht senkrecht auf den Hoehenlinien und ist tangential an der Falllinie.

2. **Divergenz** (Skalarprodukt mit einem Vektor) $\vec{u} = \left\{ u_x, u_y, u_z \right\}$

   $$\nabla \cdot \vec{u} = \text{div } \vec{u} = \left\{ \frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z} \right\}$$

   anschaulich: Quellen und Senken eines Vektorfeldes

3. **Rotationen** (Vektorprodukt mit einem Vektor)

   $$\nabla \times \vec{u} = \text{rot } \vec{u}$$

   (siehe oben)

   anschaulich: Wirbel im Stroemungsfeld

4. **Kombinationen** div grad $f = \nabla(\nabla f) = \Delta f$ (Laplace) $= \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}, \frac{\delta^2 f}{\delta z^2}$

Energie = gespeicherte Arbeit $[E] = J$

$=$ die Faehigkeit, Arbeit zu verrichten

Beispiel: Hubarbeit $m \cdot g \cdot h \rightarrow$ potientielle Energie $m \cdot g \cdot h \rightarrow$ loslassen $\rightarrow$ kinetische Energie $\frac{1}{2} m v^2$

Der Energie-Erhaltungs-Satz (EES)

2. Newtonsches Gesetz: $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

   $\int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt$

$I = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int \vec{F} d\vec{r} = E_p^1 - E_p^2$ (Arbeit, potientielle Energie)

$\mathbb{I} = m \int \vec{v} d\vec{r} = \frac{m}{2} v_2^2 = \frac{m}{2} v_1^2 = E_{\text{kin}}^2 - E_{\text{kin}}^1$

$\longrightarrow E_{\text{kin}}^1 + E_p^1 = E_{\text{kin}}^2 + E_p^2$ (EES der Mechanik)

Beschleunigungsarbiet (2.NG) wird als Zuwachs kinetischer Energie gespeichert.

- Energie wird nicht "erzeugt" oder "verbraucht"
- Energieformen werden ineinander umgewandelt

Beispiel: Pendel

1. $v = 0 \to E_{\text{kin}} = 0, h = h_{\text{max}} \to E_{\text{pot}} = mgh_{\text{max}}$
2. $v = v_{\text{max}} \to E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2, h = 0 \to E_{\text{pot}} = 0$
3. Siehe 1

Kraftfelder und Potential

Wir nehmen ein konservatives Kraftfeld an und gehen von Punkt P um $\delta\vec{r}$ zu Punkt P'

es aendert sich die potientielle Energie $E_p(x, y, z) = E_p(P)$ um $\delta E_p = \frac{\delta E_p}{\delta x} \delta x + \frac{\delta E_p}{\delta y} \delta y + \frac{\delta E_p}{\delta z} \delta z$

da wir eine Strecke in einem Kraftfeld zuruecklegen, verrichten wir Arbeit $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\delta E_p$
$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\delta E_p$ (gespeichert als potientielle Energie)

-> $F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \overset{\text{von oben}}{=} -\frac{\delta E_p}{\delta x} \delta x - \frac{\delta E_p}{\delta y} \delta y - \frac{\delta E_p}{\delta z} \delta z$

daher $F_x = -\frac{\delta E_p}{\delta x} \delta x F_y = -\frac{\delta E_p}{\delta y} \delta y F_z = -\frac{\delta E_p}{\delta z} \delta z$

$\vec{F} = -\text{ grad } E_p = -\nabla E_p$

Nachtrag: Es existiert ein Skalarfeld DURCHSCHNITT $(\vec{r})$ (Potential), sodass $\vec{F} = -k \nabla o(\vec{r})$

$(\longleftrightarrow \vec{F}(\vec{r})$ ist ein konservatives Kraftfeld)

Drehimpuls und Drehmoment

MP mit Impuls $\vec{p}$ auf Bahn $\vec{r}(t)$

Definition: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ Drehimpuls

wichtig: immer in Bezug auf den Koordinatenursprung O.

wir zerlegen $\vec{v}$ in $\vec{v}_r \parallel \vec{r}$ und $\vec{v}_\varphi$ senkrecht r (Polarkoordinaten)

$\longrightarrow \vec{L} = m\left[\vec{r} \times \left(\vec{v}_r + \vec{v}_\varphi\right)\right] = m\vec{r} \times \vec{v}_\varphi$

$\left|\vec{L}\right| = mr\omega r \sin(90°) = mr^2 \dot{\varphi}$

$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right]$

$= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}$

Definition: $\vec{D} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$ (Drehmoment)

Analogie

Translation	Rotation
Impuls $\vec{p}$	Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Kraft $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$	Drehmoment $\vec{D} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$

1. NG $\vec{p} = \text{const} \longleftrightarrow \vec{F} = 0$	$\vec{L}$ const $\longleftrightarrow \vec{D} = 0$
Position $\vec{r}$	Winkel φ
Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$

Beispiel: Zentralkraftfelder $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$

$\vec{D} = f(r)\vec{r} \times \vec{e}_r = 0 = \dot{\vec{L}}$

$\longrightarrow \vec{L} = \text{const}$