Aufgabe 1 Freier Fall mit Reibung (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde der freie Fall von Körpern unter Vernachlässigung der Luftreibung besprochen.

Dabei wirkt nur die (konstante) Erdanziehungskraft $F_g = (0, 0, -mg)$ auf das Teilchen. Den Effekt der Luftreibung können wir (für nicht zu hohe Geschwindigkeiten) mit Stokesscher Reibung modellieren; dabei wirkt eine zweite, abbremsende Kraft $F_r = (0, 0, -\beta v)$ mit Parameter β (Abhängig unter anderem von der Gröûe und Form des Teilchens, aber auch von Eigenschaften der Luft).

Die Trajektorie kann dann geschrieben werden als:

$z_r(t) = z_0 - \frac{gm}{\beta}(t - \frac{m}{\beta}\left(1 - e^{\frac{-\beta t}{m}}\right)$

(a) Bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeiten $v(t)$ des Teilchens.

$v_r(t) = -\left(ge^{\frac{-\beta t}{m}} + \frac{gm}{\beta}\right)$

(b) Leiten Sie nun die Beschleunigung $a(t)$ des Teilchens her.

$a_r(t) = \frac{g\beta}{m}e^{\frac{-\beta t}{m}}$

(c) Nähern Sie für $x = \frac{\beta t}{m} \ll 1$ die Exponentialfunktion bis zur zweiten Ordnung in x, und zeigen Sie, dass zu Beginn die Trajektorie mit der für den reibungsfreien Fall übereinstimmt.

(d) Skizzieren Sie $z_g(t)$ (freier Fall ohne Reibung) und $z_r(t)$ (mit Reibung) in einem gemeinsamen Graphen.

(e) Skizzieren Sie separat $v_r(t)$ und $a_r(t)$.

Aufgabe 3.2 Zugkraft (5 Punkte)

Wir betrachten ein von der Decke herunterhängendes Seil mit linearer Massendichte ρ (Einheit: Kilogramm pro Meter) und Länge L. Bestimmen Sie die Zugkraft $T(z)$ (Einheit: Kilogramm × Meter / Sekunde^2) als Funktion der Höhe z. Hier ist die stationäre Lösung gesucht, d.h. alle Kräfte gleichen sich aus.

(a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

Das Seil endet genau im Ursprung des Koordinatensystems.

(b) Definieren Sie ein Koordinatensystem (die z-Achse genügt hier).

(c) Beschreiben Sie in Worten die Zugkraft: Was sind ihre Ursachen, was bewirkt sie?

Ursachen fuer die Zugkraft sind die Masse m des Seils kombiniert mit der Erdbeschleunigung g. Nun ist es so, dass Die Zugkraft an der Aufhaengung des Seils maximal ist und bei kleinerem z linear abnimmt.

Das liegt daran, dass nur die Masse des Seils unter dem Aufhaengungspunkt (Fixierpunkt) zur Zugkraft T beitraegt.

(d) Berechnen Sie $T(z)$ und überprüfen Sie die Einheiten.

Man definiere die Masse als $m(z) = (L - z)\rho$, wobei $0 \leq z \leq L$.

Dann folgt fuer aus der Kraftbeziehung $F = ma$ die Zugkraft $T(z) = m(z)g = (L - z)\rho g$.

Einheiten der verwendeten Groessen sind gegeben als:

$[T] = N$; $[\rho] = \frac{kg}{m}$; $[L - z] = m$; $[m] = kg$; $[g] = \frac{m}{s^2}$;

Einsetzen liefert folgende Aequivalenz:

$[(L-z)\rho g] = [L-z][\rho][g] = m\frac{kg}{m}\frac{m}{s^2} = \frac{mkg}{s^2} = N = [T]$