CWR
Vorlesung 2

Inhaltsverzeichnis

Differentialgleichungen

ODEs

Mechankik: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ist eine ODE der Ordnung 2

$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ Newtons'sche Mechanik

zuruck fueren auf ein System von ODEs 1. Ordnung

Hamilton'sche Mechanik:

$$\frac{\partial \mathbb{H}(q,p)}{\partial d} = \frac{p}{m}, \mathbb{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

Anfangsbedingungen $q(t = 0) = q_0$ und $p(t = 0) = p_0$.
Beispiele sind Ratengleichungen, radioaktiver Zerfall und Populationsdynamik.

Pearl-Unschulat Modell

$n(t)$: Anzahl der Individuen

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \sqrt{n}n$$
$$\sqrt{n} = \text{const}$$
$$n(t) = n(0)\exp\left(\sqrt{t}\right)$$
$$\sqrt{n} = r_0(1 - k_n), k = \text{const} > 0$$

allgemeine Formulierung: $y^{(n)}(t) = g\left(y, y', ..., y^{(n+1)}, t\right)$

$$y_n = y^{(n)}$$
$$y^{(n+1)} + y^{(n)} = g(y, y_1, ..., y_{n-1}, t)$$
$$y'_{n-2} = y_{n-1}$$
$$y' = g_1$$

$$\dot{\vec{y}} = \vec{g}(y_1, ..., y_{n-1})$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(y, t)$$

Diskretisierung der Zeit $[0, T], t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_n = n\Delta t = T$

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + \int_{t_i}^{t_{i-1}} dtg(y(t),t) \overset{\text{Euler-Cauchy}}{\approx} y(t_{i-1}) + g(y(t_{i-1},t_{i-1}))\Delta t + O(\Delta t^2)$$

mit globalem Fehler bei Integration ueber $[Q,T]$

$$E \sim \frac{T}{\Delta t}\Delta t^2 \sim T\Delta t \sim O(\Delta t)$$

Beispiel Ratengleichung $r(n) = r - (1 - k_n)$

$$n(t_i) = n(t_{i-1}) + r_0\left(1 - \frac{k_n}{t_{i-1}}\right)n(t_{i-1}\Delta t)$$

$$n(t_i) = (1 + \Delta t r_0)n(t_{i-1})\left(1 - \frac{\Delta t r_0 k}{1 + \Delta t r_0}n(t_{i-1})\right)$$

Variable $x(t_{i-1}) = \frac{\Delta t r_0 k}{1+\Delta t r_0}n(t_{i-1})$

$$x(t_i) = 4\mu x(t_{i-1})(1 - x(t_{i-1})), 4\mu = 1 + \Delta t r_0$$

Zuletzt: Δt klein

$$n(t) = \frac{1}{k}, x(t) = \frac{\Delta t r_0}{1 + r_0\Delta t} = \frac{4\mu - 1}{4\mu}$$

Pointcarre Abbildung mit Bifurkation.

Leapfrog Algorithmus

$$y' = g(y,t), y'(t_i)\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$y'(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

TODO: Implement this algorithmus as well as the global error

Velocity-Verlet Algorithmus fuer klassische Mechanik

$$\dot{\vec{t}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ a(x_i t) \end{pmatrix}$$

$$v(t_{i+1}) = x(t_{i-1}) + 2v(t_i)\Delta t + O(\Delta t^3)$$

$$v\left(t_{i_1}\right) = v(t_{i-1}) + 2a(x(t_i), t_1)\Delta t + O(\Delta t^3)$$

Umschreiben der zweiten Gleichung:

Es wird von t_{i-1} nach t_{i+1} gegangen.

$$v(t_i) = v(t_{i-1}) + a\left(x\left(t_{i_1}\right), t_{i-1}\right)\Delta t$$

$$x(i_{i+1}) = x(t_{i-1}) + 2v(t_i)\Delta t$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + a(x(t_{i+1}), t_{i+1})\Delta t$$

Das ergibt

$$v(t_{i+2}) = v(t_{i+1}) + a(x(t_{i+1})t_{i+1})\Delta t$$

$\implies v(t_{i+2}) = v(t_i) + 2a(x(t_{i+1}), t_{i+1})\Delta t$

$2\Delta t = \delta t$

$$v\left(t+\frac{\delta t}{\alpha}\right)=v(t)+a(x(t),t)\frac{\delta t}{2}$$

$$x(t+\delta t)=x(t)+v\left(t+\frac{\delta t}{2}\right)\delta t$$

$$v(t+\delta t)=v\left(t+\frac{\delta t}{s}\right)+a(x(t+\delta t),t+\delta t)\frac{\delta t}{2}$$

Forderungen an einen guten Integrator der klassischen Mechanik

- Energieerhaltung
- Zeitumkehrinvarianz
  1. der Bewegungsgleichungen sind zeitumkehrbar invariant. Jeder vernuenftige Algorithmus erfuellt dies zu der Ordnung $O(\delta t^2)$

     $$\begin{pmatrix}x_0\\v_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(t)\\v(t)\end{pmatrix}\overset{T(\Delta t)}{\rightarrow}\begin{pmatrix}x(t+\Delta t)\\v(t+\Delta t)\end{pmatrix}\rightarrow$$

  2. des Algorithmus $x_0-x_1=0, v_0-v_1=0$
- Phasenraumerhaltung symplektisch

$t_{i-1}\rightarrow t_{i+1}$

Zeitumkehr

$$\vec{x}'(t_{i+1})=\vec{x}(t_{i+1})$$
$$\vec{v}'(t_{i+1})=-\vec{v}(t_{i+1})$$

$t_{i+1}\rightarrow t_{i+3}$

$$v'(t_{i+2})=v'(t_{i+1})+a(x'(t_{i+1}),t_{i+1})\Delta t=-v(t_{i+1})+a(x(t_{i-1}))\Delta t$$
$$\begin{aligned}x'(t_{i+1})&=x'(t_{i+1})+2v'(t_{i+1})\Delta t\\&=x(t_{i+1})+2[-v(t_{i+1})+a(x(t_{i+1}))\Delta t]\Delta t\\&=x(t_{i-1})+2\Delta t[v(t_i)-v(t_{i+1})+a(x(t_{i+1}))\Delta t]\\&=x(t_{i-1})\end{aligned}$$

Takeways

- Ableitung diskretisierung
- Taylorentwicklung der Ableitung
- Mit Euler-Cauchy kann am einfachsten nach vorne integriert werden