Diff II
Vorlesung 3

Inhaltsverzeichnis

Klassen von Raeumen 1
Konvergenz mittels Topologien 1

Klassen von Raeumen

In metrischen Raeumen mit Metrik d gibt es den Begriff von offenen Mengen, wodurch dann auch eine Topologie τ_d : alle Mengen, die unter d offen sind gegeben ist. Diese Topologie ist eine Familie von Mengen.

Konvergenz mittels Topologien

Fuer Konvergenzbegriffe ist dann einzig τ notwendig.

Lemma 0.1: Sei (M, d) ein metrischer Raum, und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und $a \in M$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann wenn golgendes gilt:

$$\forall U \in \tau_d : a \in U : \exists n \in \mathbb{N} : \forall n \geq n : a_n \in U$$

Definition 0.1: Sei M ein metrischer Raum mit Metriken d_1 und d_2. Wir nennen $d_1$und d_2 aequivalent falls $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$. Ist V ein K-VR mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^\star$ so nennen wir diese aequivalent, falls die erzeugten Metriken aequivalent sind.

Lemma 0.2: Sei V ein K-VR, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\|\cdot\|, \|\cdot\|^\star, V \to \mathbb{R}^+$ Normen auf V . Dann sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^\star$ aequivalent genau dann wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt sodass

$$C_1\|x\| \leq \|x\|^\star \leq c_2\|x\|, \forall x \in V.$$

Proof: Seien τ_1 und τ_2 die von den Normen (1) und (2) erzeugten Topologien. Sei $U \in \tau_2$. Nun gilt es zu zeigen, dass $U \in \tau_1$. Sei $x \in U$. Dann gibt es ein $r > 0$ sodass $K_r^{(2)}(x) \subseteq U$. Wir erhalten, dass gilt

$$B_{c_2^{(1)}}(x) = \{y \in V \mid \|x - y\| < c_2^{-1} r\} \subseteq B_r^{(2)}(x) \subseteq U$$

Verwende TODO: finish this proof

Fuer die Rueckrichtung nehmen wir an, dass $\tau_1 = \tau_2$. Da $B_1^{(1)} \in \tau_{(1)}$ und $0 \in B_1^{(1)}(0)$ gibt es $r > 0$ sodass $B_r^{(2)} \leq B_1^{(1)}(0)$. Sei $x \in V \setminus \{0\}$. Dann ist $1 + 1$

■

Example:
Betrachte $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$. Fuer $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n}|x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1$ und $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \leq n \max_{1\leq k\leq n}|x_k| = n\|x\|_\infty$, also sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ aequivalent.

Theorem 0.1: Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind aequivalent.

Hier bezeichnet e_n den Einheitsvektor in Richtung n.

Proof: Sei die Euklidische Norm als (1) fix. Ferner sei (2) eine beliebige weitere Norm auf $\mathbb{R}^n$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=0}^{n} x_i e_i\right\| \leq \sum_{i=0}^{n} |1+1| \|e_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i|} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \|e_i\|^2}$$

Sei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ und $c := \inf\{\|x\| \mid x \in S^{n-1}\}$. Behauptung: es gilt $c > 0$.

Angenommen $c = 0$. Waehle $x_l \in S^{n-1}, l \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{l \to \infty} \|x_l\| = 0$. ■