Lineare Abbildungen

Eine Abb. $f : V \to W$, zwischen VR V und W ueber K ist linear wenn

$$\forall x, y \in V \ \forall \lambda \in K : f(x+y) = f(x) + f(y) \wedge f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Eine Matrix ist gleichbedeutend zu einer linearen Abbildung.

Inhomogene LGS

Sei $\vec{x}_{\text{hom}}$ Lsg. des homogenen LGS $A\vec{x}_{\text{hom}} = \mathbb{0}$.

Sei $\vec{x}_{\text{part}}$ Lsg. des inhomogenen LGS $A\vec{x}_{\text{part}} = \vec{c}$.

$$A(\vec{x}_{\text{hom}} + \vec{x}_{\text{part}}) = \vec{c}$$

↳ Ein inhomogenes LGS hat genau dann eine eindeutige Lsg., wenn hom. Lsg. und inhom. Lsg. existieren.

Inverse

Eine Matrix A heisst invertierbar, wenn die zug. Abb. ein Isomorphismus ist. Die Matrix der Umkehrabb. heisst dann inverse Matrix A^{-1}.

Eigenschaften

1. jede invertierbare Matrix ist quadratisch
2. sind $A, B \in K^{n \times n}$, dann ist

   $$B = A^{-1} \Leftrightarrow AB = BA = E_n, \quad E_n = (\delta_{ij})$$
3. ist A invertierbar, so auch A^{-1}
4. sind $A, B \in K^{n \times n}$ invertierbar, so auch AB

↳ Existiert inverse Matrix zur Kopf-Matrix eines inhom. LGS, so ist diese geloest durch $\vec{x} = A^{-1}\vec{c}$.

Determinante

Diese ist relevant fuer das Loesen von LGS, invertieren von Matrizen, Subst. von Funktionen mehrerer Veraenderlicher und Eigenwertproblemen.

$$n = 2, \quad \det(A) = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = ad - bc$$

$$n = 3, \quad \det(A) = \left| \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \right|$$

Laplace'scher Entwicklungssatz

Determinante kannn nach beliebiger Zeile oder Spalte entickelt werden.

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| = a_{11} \left| \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| - a_{21} \left| \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| + a_{31} \left| \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \\ & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right|$$

Allgemein gilt fuer $n \geq 2$, $A \in K^{n \times n}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} U_{i1}, \quad U \coloneqq \text{Unterdeterminante an der Stelle } (i1)$$

Transponierte

Ist $A = \left(a_{ij}\right)$, so ist die transponierte Matrix gegeben durch $a_{ij}^T = a_{ji}$.T Fuer quadrasiche Matrizen bleibt die Determinante beim Transponieren gleich. Ferner gilt $(AB)^T = B^T A^T$.