Universität Göttingen, Institut für Theoretische Physik
Rechenmethoden der Physik, WiSe 2024/25
Dozent: Prof. Dr. S. Schumann

Vorlesungswoche 4.11.–8.11.2025

Übung 1: Reelle Funktionen einer Variablen

1. Elementare Funktionen

a) Verwenden Sie $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ und die Additionstheoreme, um die folgende Identität zu zeigen:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}. \tag{1}$$

b) Man vereinfache $y = \tan(\arccos(x))$.

c) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktionen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ jeweils durch

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \tag{2}$$

gegeben sind. Welche Definitionsbereiche ergeben sich?

d) Zeigen Sie die hyperbolischen Additionstheoreme:

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y), \tag{3}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y). \tag{4}$$

e) Zeigen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$, dass $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ gilt.

f) Lösen Sie $x = 2\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right)$ nach y auf und zeichnen Sie ein Bild der Funktion.

2. Partialbruchzerlegung

Gesucht ist die Partialbruchzerlegung der folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$,

(ii) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1}$,

(iii) $f(x) = \frac{x}{x^4-1}$.

3. Differenzieren

a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 1$ über den Differenzenquotienten und beantworten Sie dann die folgenden Fragen:

(i) Wie groß ist die erste Ableitung an der Stelle $x = 2$?

(ii) Wie lautet der zugehörige Funktionswert?

(iii) An welcher Stelle hat die Funktion Extremwerte?

b) Berechnen Sie (unter Verwendung der bekannten Ableitungsregeln) die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$,

(ii) $f(x) = \sinh\big(x^2\big)$,

(iii) $f(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$. (Berechnen Sie in diesem Fall die Ableitung f' einmal direkt und einmal mit Hilfe der Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion mit $\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1}$.)

c) Wir betrachten die abschnittsweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Wir schreiben auch: $f(x) = |x|$, d.h. diese Funktion liefert den Betrag von x.

(i) Skizzieren Sie $f(x)$.

(ii) Berechnen bzw. vereinfachen Sie: $|a^2|, |a|^2, |ab|, |-a|$.

(iii) Zeigen Sie: $f(x)$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $x = 0$.