Prof. Dr. Jörg Brüdern
Leo Schäfer

Georg-August-Universität Göttingen
Wintersemester 24/25

Analytische Geometrie und Lineare Algebra I — Übungsblatt 3

Namen:

Übung: Abgabe bis: Montag, 18.11. um 10:00 Uhr

Denken Sie daran, dass alle Antworten zu begründen sind!

Aufgabe 1. In der Vorlesung haben wir bereits $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als Ring mit Addition und Multiplikation kennengelernt.

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* := \{1+5\mathbb{Z}, 2+5\mathbb{Z}, 3+5\mathbb{Z}, 4+5\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad \text{und}$$
$$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^* := \{1+9\mathbb{Z}, 2+9\mathbb{Z}, 4+9\mathbb{Z}, 5+9\mathbb{Z}, 7+9\mathbb{Z}, 8+9\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$

jeweils eine Gruppe bezüglich Multiplikation sind.

(b) Finden Sie ein Element $x \in (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$, sodass $\langle\{x\}\rangle = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ gilt.

(c) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $\big((\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*, \cdot\big)$ und $\big(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +\big)$ an.

Ist $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ auch zu einer Gruppe der Form $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph? Falls ja, geben Sie einen Isomorphismus an.

Aufgabe 2. Seien G und H Gruppen. Angenommen G ist endlich und ihre Ordnung eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Jeder Homomorphismus $\phi\colon G \to H$ ist entweder trivial oder injektiv.

(b) Jeder Homomorphismus $\phi\colon H \to G$ ist entweder trivial oder surjektiv.

Hinweis: Wir nennen einen Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \to H$ trivial, falls ϕ alle Elemente aus G auf das neutrale Element e_H in H abbildet.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ mit den folgenden Unterräumen:

$$U_1 = \big\langle\big\{(0,1,0,2), (1,0,1,0), (-1,0,1,0)\big\}\big\rangle, \quad U_2 = \big\langle\big\{(1,0,3,0), (0,1,0,0), (1,3,3,3)\big\}\big\rangle.$$

(a) Bestimmen Sie $U_1 \cap U_2$.

(b) Ist $U_1 \cup U_2 = V$?

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3 : 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $V = \big\langle\big\{(2,-7,0), (0,3,2), (1,1,3)\big\}\big\rangle$ ist.

(c) Ist die Menge

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3 : 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^3$?