Damaris Schindler
Oscar Cosserat
SS 2025

Differenzial- und Integralrechnung 2
Blatt 1

Abgabe der Lösungen:
Fr., 18. April 2025
bis 10:00 h

1	2	3	4	5	6	Σ

Übungsgruppe:	
bearbeitet von:	

Tipp: Wir bitten darum, die Übungsblätter in Zweiergruppen abzugeben.

Aufgabe 1. Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt, falls ein $C \geq 0$ existiert, sodass für jedes $t \in T$ gilt $\|t\| \leq C$. Betrachten Sie folgende Mengen:

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x < 1 \text{ und } 0 \leq y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
2. für $\rho \geq 0$, $A_2 = \{(\rho\cos(\delta)\cos(\theta), \rho\cos(\delta)\sin(\theta), \rho\sin(\delta)) \in \mathbb{R}^3, (\delta, \theta) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$.
3. $A_3 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \max_{1\leq i\leq n} x_i \leq 2\} \subset \mathbb{R}^n$.
4. $A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xyz = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Beantworten Sie für jede dieser Mengen die folgende Fragen:

1. Ist die Menge beschränkt ?
2. Für jedes $1 \leq i \leq 4$: existiert ein Element $\tilde{a}_i \in A_i$, sodass $\|\tilde{a}_i\| = \sup_{a_i \in A_i} \|a_i\|$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2. Zeichnen Sie die Einheitskugeln $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = y, \\ 1, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.
2. Was sind die offenen und die abgeschlossenen Mengen unter dieser Metrik ?
3. Wenn wir $n = 1$ setzen, was ist das Innere von $[0, 1]$ und was ist der Abschluss von $(0, 1)$ unter dieser Metrik ?

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Sei M ein endlicher metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede Menge offen ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 5. Sei $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$ und sei $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_k$ gegen $\mathbf{a}$ genau dann konvergiert, wenn $x_{k,i}$ gegen a_i konvergiert für alle $i = 1, \ldots, n$.

(3 Punkte)

Aufgabe 6. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Finden Sie eine Folge in $\mathbb{R}^n$, die beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

(2 Punkte)