Diff II
Vorlesung 3

Inhaltsverzeichnis

Klassen von Raeumen

In metrischen Raeumen mit Metrik d gibt es den Begriff von offenen Mengen, wodurch dann auch eine Topologie τ_d : alle Mengen, die unter d offen sind gegeben ist. Diese Topologie ist eine Familie von Mengen.

Konvergenz mittels Topologien

Fuer Konvergenzbegriffe ist dann einzig τ notwendig.

Lemma 0.1: Sei (M, d) ein metrischer Raum, und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M und $a \in M$. Dann gilt $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ genau dann wenn golgendes gilt:

$$\forall U \in \tau_d : a \in U : \exists n \in \mathbb{N} : \forall n \geq n : a_n \in U$$

Definition 0.1: Sei M ein metrischer Raum mit Metriken d_1 und d_2. Wir nennen $d_1$und d_2 aequivalent falls $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$. Ist V ein K-VR mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^\star$ so nennen wir diese aequivalent, falls die erzeugten Metriken aequivalent sind.

Lemma 0.2: Sei V ein K-VR, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\|\cdot\|, \|\cdot\|^\star, V \to \mathbb{R}^+$ Normen auf V . Dann sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^\star$ aequivalent genau dann wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt sodass

$$C_1 \|x\| \leq \|x\|^\star \leq c_2 \|x\|, \forall x \in V.$$

Proof: Seien τ_1 und τ_2 die von den Normen (1) und (2) erzeugten Topologien. Sei $U \in \tau_2$. Nun gilt es zu zeigen, dass $U \in \tau_1$. Sei $x \in U$. Dann gibt es ein $r > 0$ sodass $K_r^{(2)}(x) \subseteq U$. Wir erhalten, dass gilt

$$B_{c_2^{(1)}}(x) = \{y \in V \mid \|x - y\| < c_2^{-1} r\} \subseteq B_r^{(2)}(x) \subseteq U$$

Verwende TODO: finish this proof

Fuer die Rueckrichtung nehmen wir an, dass $\tau_1 = \tau_2$. Da $B_1^{(1)} \in \tau_{(1)}$ und $0 \in B_1^{(1)}(0)$ gibt es $r > 0$ sodass $B_r^{(2)} \leq B_1^{(1)}(0)$. Sei $x \in V \setminus \{0\}$. Dann ist $1 + 1$

∎

Example:
Betrachte $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$. Fuer $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1$ und $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \leq n \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = n\|x\|_\infty$, also sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ aequivalent.

Theorem: Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind aequivalent.

Hier bezeichnet e_n den Einheitsvektor in Richtung n.

Proof: Sei die Euklidische Norm als (1) fix. Ferner sei (2) eine beliebige weitere Norm auf $\mathbb{R}^n$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=0}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=0}^n |1+1| \|e_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^n |x_i|} \sqrt{\sum_{i=0}^n \|e_i\|^2}$$

Sei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ und $c := \inf\{\|x\| \mid x \in S^{n-1}\}$. Behauptung: es gilt $c > 0$.

Angenommen $c = 0$. Waehle $x_l \in S^{n-1}, l \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{l \to \infty} \|x_l\| = 0$.

TODO: finish this proof ■

Stetige Abbildungen und normierte Raeume

Wir nennen einen Metrischen Raum vollstaendig, falls jede Cauchy-Folge in M einen Grenzwert in M hat.

Example:
- $\mathbb{R}^n$ ist vollstaendig
- $\mathbb{Q}^n$ ist nicht vollstaendig, da die Folge gegen $\sqrt{2}$ keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ hat
- abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind vollstaendig (Q: Folgt dies aus Punkt eins?)

Definition 0.2: Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$ und V ein normierter Vektroraum. Wir nennen V Banachraum, falls V vollstaendig ist.

Example:
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ist fuer jedes $p \geq 1$ ein Banachraum (Q: Warum nicht fuer $p = \frac{1}{2}$?)
- Fuer $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ betrachte den Raum der stetigen Funktionen $C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ mit den Normen $\|f\|_{C([a,b])} := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$

TODO: Show that C([a,b]) is complete

Lemma 0.3: Sei V ein K-VR mit Skalarprodukt, $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ und $\|x\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$