Diff II
Vorlesung 1

Inhaltsverzeichnis

Tutorium ist immer Mi 2-6pm

Tutoren sind Oscar Cossarat und Simon Fischer

Das Hauptziel ist das Wissen aus dem ersten Semester ueber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf meherer Dimensionen zu verallgemeinern.

1. Topologische Grundbegriffe

1.1. Euklidischer Abstand im $\mathbb{R}^n$

In der Diff 1 haben wir Stetigkeit Diffbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}, a < b$ besprochen.

Diese sind hier eindimensional und auf einem Kompaktum definiert.

$\Longrightarrow$ Verallgemeinrerung zu Funktionen $f : \mathbb{D} = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$?

$\Longrightarrow$ Konvergenz im $\mathbb{R}^n$?

Example: Auf $\mathbb{C}$ haben wir die Abstandsfunktion

$$d(a, b) = |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

wobei $|z| = |z_1 + iz_2| := \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Definition 1.1.1: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Euklidische Norm als die Funktion

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+, \quad (x_1, ..., x_n) \mapsto \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Wir definieren die euklidische Metrik $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x, y \mapsto d(x, y) = \|x + y\|$.

Wir schreiben $\underline{x}$ fuer einen Vektor x. Ich werde einfache Symbole verwenden und nur im Notfall des Kontexts eine Unterscheidung machen.
Erfuellt $d(x, y) = \|x - y\|$ die Eigenschaften einer Metrik?

Definition 1.1.2: Ein metrischer Raum ist ein Tupel (X, d_x) aus einer Menge X und einer Funktion $d_x : X \times X \to R^+$ mit drei Eigenschaften.

1. $d(x, x) = 0 \land d(x, y) \neq 0, x \neq y$
2. Symetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
3. Dreiecksungleichung

Wir definieren das **Standard-Skalarprodukt** als $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.

Lemma 1.1.1: Cauchy-Schwarz Ungleichung

Fuer $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$

Die beiden Vektoren sind genau dann linear abhaengig, wenn Gleichheit gilt

Proof: TODO: Create proof for cauchy schwarz ■

Lemma 1.1.2: Die euklidische metrik $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \to |x - y|$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

Proof: TODO: Proof, dass die euklidische Metrik eine Metrik auf R^n ist ■

1.2. Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Remark 1.2.1: Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$. Wir sagen, dass die Folge gegen a konvergiert falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : d(a_k, a) < \varepsilon, \forall k \geq k_0$$

alternativ: $\lim_{k\to\infty} d(a_k, a) = 0$.

In dem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_k = a$.

Lemma 1.2.1: Sei $x_k, k \in \mathbb{N}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$ mit $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots)$ und $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Dann konvergiert die Folge genau dann gegen a, wenn $\lim_{n\to\infty} x_{n,j} = a_j, \forall 1 \leq j \leq n$.

Proof: TODO: proof fuer das lemma, dass folgen komponentenweise konvergieren

Idee: verwende die Ungleichung $|x_k - a_l| \leq |x_k - a| \leq \sum_{i=0}^{n} |x_k - a_l|$ ■

Definition 1.2.1: Wir werden eine Folge im $\mathbb{R}^n$ beschraenkt, falls es eine Konstante $R > 0$ gibt, sodass $d(0, a_k) < R, \forall k \in \mathbb{N}$

d.h $a_k \in K_{R(0)}, \forall k \in \mathbb{N}$

Remark 1.2.2: Ist eine Folge im $\mathbb{R}^n$ konvergent, so ist diese beschraenkt.

Theorem 1.2.1: Bolzano-Weierstrass

Eine beschraenkte Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Proof: Induktion nach n. Fuer $n = 1$ siehe Diff 1. Angenommen Theorem 9 gilt fuer ein $n \in \mathbb{N}$ und es ist eine beschraenkte Folge im $\mathbb{R}^{n+1}$ gegeben.

Dann ist diese Folge beschraenkt auf $\mathbb{R}^n$ eine beschraenkte folge mit konvergenter Teilfolge.

TODO: Finish proof of Bolzano weierstrass fuer R^n ■

Theorem 1.2.2: $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik ist vollstaendig.

Proof: Fuer eine Cauchyfolge F von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind die Folgen der Komponenten wieder Cauchy-Folgen im $\mathbb{R}$. Diese haben wegen der Vollstaendigkeit von $\mathbb{R}$ einen Grenzwert. Nach Lemma 6 konvergiert also die Folge F. ■