Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner, Prof. Dr. S.R. Manmana

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Vorlesung Analytische Mechanik SoSe 2025

2. Präsenzaufgabenblatt

Notation

- Wenn nicht anders angegeben, gilt in allen Übungsaufgaben dieser VL folgende Notation für den Ortsvektor und seine Komponenten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1}$$

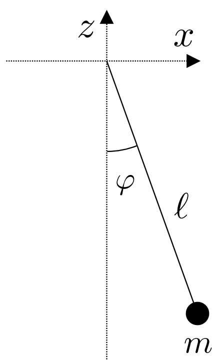
- Die Basisvektoren für kartesische Koordinaten x, y, z bezeichnen wir mit $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.
- Die Basisvektoren für Polarkoordinaten r, φ bezeichnen wir mit $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$.

Präsenzaufgaben

Die Präsenzaufgaben sollen während der Übungsstunde bearbeitet werden. Ausführliche Lösungen werden später im Skript veröffentlicht.

Wegen des Feiertages am Montag, 21.4.2025, nehmen die Teilnehmenden der Übungsgruppen 1,2 und 8 bitte an den anderen Übungsgruppen am Dienstag und Mittwoch teil.

Präsenzaufgabe P2.1 *Mathematisches Pendel*



Das mathematische Pendel bezeichnet ein ebenes System (also z.B. in der z-x Ebene), in der ein Massepunkt mit Masse m an einem masselosen Stab der festen Länge ℓ befestigt ist. Der Stab wiederum sei am anderen Ende fest, so dass der Massepunkt sich nur auf Kreisbahnen bewegen kann. Daher müssen die Koordinaten des Massepunktes zu jedem Zeitpunkt diese Gleichung erfüllen:

$$(x(t) - x_0)^2 + (z(t) - z_0)^2 = \ell^2\,. \tag{2}$$

Der Punkt (x_0, z_0) ist das ortsfeste Ende des Stabes (siehe Skizze). Diesen Punkt wählen wir als Koordinatenursprung. In diesem Problem ist es sinnvoll, mit Polarkoordinaten (r, φ) zu arbeiten:

$$x(t) - x_0 = r\sin(\varphi(t)) \tag{3}$$
$$z(t) - z_0 = -r\cos(\varphi(t))\,. \tag{4}$$

Es ist beim mathematischen Pendel üblich, den Winkel wie in der Skizze gezeigt zu definieren.

Es wirke die Schwerkraft, d.h., bezüglich kartesischer Koordinaten gilt:

$$\vec{F}_g = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{x,z} = -mg\vec{e}_z\,. \tag{5}$$

Hinweis: Wir geben am Anfang bei der Verwendung von Spaltenvektoren an, auf welche Basis sich diese beziehen.

a) Was ist der Wertebereich von φ?

b) Welche Bedingung an den Radius r ergibt sich aus Gleichung (2)? Wieviele unabhängige Koordinaten gibt es?

c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung (BWGL) für φ her:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi) = 0\,. \tag{6}$$

Gehen Sie dazu zunächst so vor: Setzen Sie die Bogenlänge s (Skizze) ins Verhältnis zum Winkel φ und stellen Sie die Kraftkomponente in Richtung der Kreislinie auf. Stellen Sie die BWGL für s auf, dann diejenige für φ.

d) Das System ist bekanntlich konservativ. Warum? Geben Sie ein Potential $V(x, z)$ an und zeigen Sie, dass dieses nur von φ abhängt, indem Sie x, z mithilfe von Gleichung (6) durch φ ersetzen.

e) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \tag{7}$$

nur eine Funktion von $\dot{\varphi}$ ist.

f) Betrachten Sie die BWGL im Limes kleiner Auslenkungen $\varphi \ll 1$. Zeigen Sie, dass sich die BWGL eines harmonischen Oszillators ergibt:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0\,. \tag{8}$$

Geben Sie die Eigenfrequenz ω_0 als Funktion von g, ℓ an. Stellen Sie die allgemeine Lösung der BWGL auf und lösen Sie dann das AWP $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$.