Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner, Prof. Dr. S.R. Manmana

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Vorlesung Analytische Mechanik SoSe 2025

2. Hausaufgabenblatt

Abgabe: Mittwoch 30.4.2025, 14.00 Uhr.

Name & Gruppennummer/Tutor:

Punkte Hausaufgaben:

2.1	2.2	2.3	2.4	Σ
17	10	13	(+10)	40(+10)

Die Abgabe erfolgt elektronisch über die `CloCked`-Funktion von StudIP - bitte kontaktieren Sie Ihre/n Tutor/in bei Fragen oder Problemen. Bitte geben Sie eine einzelne pdf-Datei ab (nur selbst erstellte handschriftliche Lösungen, bei Arbeiten auf Papier die Blätter einscannen oder abfotografieren und in eine einzelne Datei binden). Jede Lösung muss selbsterklärend formuliert sein. Angaben, die Sie zur Lösung brauchen und die nicht im Aufgabentext genannt sind, müssen Sie selbst recherchieren. Quellen, die Sie benutzt haben, müssen Sie zitieren. Computeralgebrasysteme (wie z.B. Wolfram Alpha, Maple, ChatGPT, etc.) dürfen nur eingesetzt werden, wenn dies explizit angegeben ist.
Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes abgegebene Dokument! Jede(r) Studierende muss eine individuelle Lösung einreichen!

Lernziele dieses Übungsblattes

- Trajektorien im Phasenraum.
- Geschwindigkeit und Beschleunigung in verschiedenen Koordinatensystemen.
- Schwingung im anharmonischen Potential: Berechnung mithilfe einer Reihenentwicklung.

Hausaufgabe HA2.1 *Kurze Aufgaben zur VL* ($*\,*\,*$) **3+2+6+2+4 Punkte**

a) Betrachten Sie einen Kreis (mit beliebigem Radius R) und eine Ellipse (mit Halbachsen beliebiger Länge a, b, die entlang der kartesischen Koordinatenachsen liegen), deren Ursprung jeweils mit dem Koordinatenursprung eines kartesischen Koordinatensystems übereinstimmt. Betrachten Sie jetzt Polarkoordinaten (r, φ) und zeichnen Sie die zugehörigen Basisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ in einem beliebigen Punkt P auf dem Kreis bzw. der Ellipse ein, der nicht auf den Koordinatenachsen liegt.

b) Wir betrachten die Bewegung eines eindimensionalen Massepunkts der Masse m beim freien, ungedämpften harmonischen Oszillator mit gegebener Gesamtenergie E und Impuls p im Phasenraum (p, x). Wie in der VL gezeigt wurde, sind die Phasenraumtrajektorien mit konstanter Gesamtenergie Ellipsen. Wie ändern sich die Ellipsen, wenn die Gesamtenergie E zunimmt?

c) Betrachten Sie den eindimensionalen freien Fall ohne Reibung. Bestimmen Sie die Kurven konstanter Gesamtenergie E im Phasenraum und skizzieren Sie diese.

d) Stellen Sie den Ortsvektor bez. kartesischer Basisvektoren dar und berechnen Sie $\ddot{\vec{r}}$, ebenfalls als Linearkombination von $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

e) Erläutern Sie den Unterschied zwischen $\dot{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ in Worten und anhand einer Rechnung.

Hausaufgabe HA2.2 *Eindimensionale zeitunabhängige Potentiale (∗ ∗ ∗)* **10 Punkte**

Ein Körper der Masse m bewegt sich im Potential

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 + \varepsilon x^4 \,.$$

Berechnen Sie die Periode der Schwingung für den harmonischen ($\varepsilon = 0$) und den *leicht* anharmonischen Fall ($\varepsilon E \ll k^2$, wobei E die Gesamtenergie ist).
Anleitung: verwenden Sie, dass sich die Periode T bei gegebenem Potential $V(x)$ und Gesamtenergie E über folgendes Integral berechnen läßt:

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2\left[E - V(x)\right]/m}} \,.$$

Dabei sind x_1 und x_2 die Umkehrpunkte der Bewegung. Verwenden Sie bei der Berechnung der Integrale die Substitution $\sin(\varphi) = \pm\sqrt{V/E}$. Sie müssen dann x und dx durch $\varphi, d\varphi$ ausdrücken. Im anharmonischen Fall muss man nähern, und zwar soll hier x bis zur 1. Ordnung in ε entwickelt werden. Bestimmen Sie $dx/d\varphi$ erst nach dem Entwickeln!

Hausaufgabe HA2.3 *Mathematisches Pendel und Phasenraum (∗ ∗ ∗)* **3+2+2+2+4 Punkte**

In Aufgabe P2.1 wurde das Beispiel eines Massepunktes der Masse m behandelt, der sich nur auf einer Kreisbahn bewegen darf, d.h., der Zwangsbedingung

$$x^2(t) + y^2(t) = \ell^2 \tag{1}$$

unterliegt ($z = 0$ für alle Zeiten). Dies ist realisiert durch das mathematische Pendel, bei dem ein Massenpunkt am Ende einer masselosen Stange der Länge ℓ befestigt ist, wobei die Stange um ihr anderes Ende rotieren kann (siehe Skizze in Aufgabe P2.1). Diskutieren Sie dieses Problem im Phasenraum der an dieses Problem angepassten Koordinate $\varphi(t)$, d.h., der Menge aller Punkte $(\varphi, \dot\varphi)$. Wir wählen den Wertebereich des Winkels φ so, dass gilt: $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

a) Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus P2.1 für das Potential $V = V(\varphi)$ und die Gesamtenergie $E = E(\varphi, \dot\varphi)$. Skizzieren Sie $V = V(\varphi)$ als Funktion von φ. Diskutieren Sie wieder die möglichen Bahnkurven für feste Werte von E, indem Sie $E = const$ als horizontale Linie in die Skizze eintragen. Was gilt an den Punkten mit $V(\varphi) = E$?

b) Betrachten Sie den Fall kleiner Schwingungen, d.h., $|\varphi| \ll \pi$. Dann erhalten Sie als Bewegungsgleichung für die verallgemeinerte Koordinate φ die des ungedämpften harmonischen Oszillators. Welche Trajektorien ergeben sich im Phasenraum?

c) Was passiert, wenn die Amplitude der Schwingungen größer wird, jedoch für alle Zeiten $|\varphi| < \pi$ gilt? Wie ändern sich die Phasenraumtrajektorien?

d) Wie sehen die Phasenraumtrajektorien aus, wenn die Amplitude so gross wird, dass es einen Überschlag gibt (d.h., das Pendel durchläuft den Wert $\varphi = \pi$)?

e) Stellen Sie die Gesamtenergie $E = T(\dot\varphi) + V(\varphi)$ auf. Wieso ist diese erhalten? Diskutieren Sie die möglichen Bahnkurven in der $z - x$ Ebene als Funktion von E.

f) Fassen Sie E als Funktion von φ und $\dot\varphi$ auf. Bestimmen Sie die BWGL für φ aus

$$\frac{dE(\varphi, \dot\varphi)}{dt} = 0 \,. \tag{2}$$

Beachten Sie hierbei, dass in der totalen Ableitung von E nach der Zeit alle partiellen Ableitungen relevant sind:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\ddot{\varphi} + \frac{\partial E}{\partial t}\,. \tag{3}$$

Hinweis 1: Wir haben den Phasenraum bisher für kartesische Koordinaten kennengelernt, für eine kartesische Koordinate x als die Menge aller möglichen Punkte (x, p_x). Später werden wir den Begriff Phasenraum verallgemeinern und insbesondere zu nicht-kartesischen Koordinanten in definierter Weise zugehörige Impulse p_q definieren. Für diese Aufgabe ist das nicht relevant, es reicht aus, den Raum der Punkte $(\varphi, \dot{\varphi})$ zu diskutieren.

Hinweis 2: Beachten Sie die unterschiedliche Bedeutung des Wortes Trajektorien. Die erste Bedeutung ist die der Kurve $\vec{r}(t)$, die ein Massepunkt im Ortsraum als Lösung einer Bewegungsgleichung (BWGL) durchläuft. Mit Phasenraumtrajektorien meinen wir die Menge der Punkte (q, p_q), die im Phasenraum (eines zunächst eindimensionalen Problems) mit einer Koordinate q als Funktion der Zeit und entsprechend der BWGL durchlaufen werden. q muss keine kartesiche Koordinate sein, die genaue Definition der zugehörigen Impulse p_q lernen wir später kennen.

Hausaufgabe HA2.4 *Numerische Lösung einer Bewegungsgleichung* **5+5 Bonuspunkte**

Hinweis: Für die Bearbeitung dieser Bonusaufgabe haben Sie 2 Wochen Zeit (d.h., die Abgabe dieser Aufgabe ist bis Mittwoch 7.5.2025, 14.00 Uhr möglich).

Wir betrachten den ungedämpften harmonischen Oszillator in einer Dimension:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,$$

mit $x = x(t)$.

a) Überführen Sie die DGL 2.Ordnung in ein System von DGLn 1. Ordnung und wenden Sie auf dieses das numerische Euler-Verfahren an. Verwenden Sie $\omega_0 = 1, x_0 = 1, v_0 = 0$ und betrachten Sie das Intervall $t \in [0, 20]$. Stellen Sie die Lösung im Phasenraum dar. Berechnen Sie ausserdem die Gesamtenergie für drei verschiedene Zeitschritte $\Delta t = 10^{-2}$, 10^{-3}, 10^{-4} und berechnen Sie jeweils die Differenz zur exakten Lösung. Plotten Sie die Gesamtenergien (die drei numerischen Lösungen sowie die exakte Energie als Funktion der Zeit), sowie jeweils die Differenz der numerisch berechneten Gesamtenergie zum exakten Ergebnis.

b) Wiederholen Sie das Verfahren für den gedämpften harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

Plotten Sie die Phasenraumtrajektorien für $\omega_0 = 1, \gamma = 0.1,\ 1.0,\ 1.2$ sowie $x_0 = 1, v_0 = 0$ mit $\Delta t = 10^{-4}$. Was beobachten Sie?

Hinweis:
Sie können einen eigenen Code schreiben, oder das auf StudIP geladene Jupyter-Notebook `AM_EX5.ipynb` als Startpunkt nutzen. (Wenn Sie nicht die Jupyter-Umgebung nutzen wollen, können Sie auch das äquivalente Python-Skript `AM_EX5.py` als Startpunkt nutzen.) Sie können dann z.B. das Notebook auf den Jupyter-Server der GWDG hochladen, modifizieren und ausführen, der unter jupyter-cloud.gwdg.de erreicht werden kann. Ergänzen Sie die mit `???` markierten Stellen. Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung und reichen Sie die Antworten, sowie den von Ihnen genutzten Quellcode und die erstellten Plots wie üblich über `CloCked` bei Ihrem/Ihrer Tutor/in als Lösung ein.

Selbsttest

- Was ist der Phasenraum eines Systems?
- Was versteht man jeweils unter einer Trajektorie im Ortsraum und einer im Phasenraum?
- Welche Form besitzt die Phasenraumtrajektorie eines ungedämpften harmonischen Oszillators bzw. die eines im luftleeren Raum fallenden Steines?
- Was ist der Unterschied zwischen $\dot{r}$ und $\dot{\vec{r}}$?