Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner, Prof. Dr. S.R. Manmana

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Vorlesung Analytische Mechanik SoSe 2025

1. Hausaufgabenblatt

Abgabe: Mittwoch 23.4.2025, 14.00 Uhr.

Name & Gruppennummer/Tutor:

Punkte Hausaufgaben:

HA1.1	HA1.2	HA1.3	HA1.4	Σ
12	15	5	8	40

Die Abgabe erfolgt elektronisch über die `Clocked`-Funktion von StudIP - bitte kontaktieren Sie Ihre/n Tutor/in bei Fragen oder Problemen. Bitte geben Sie eine einzelne pdf-Datei ab (nur selbst erstellte handschriftliche Lösungen, bei Arbeiten auf Papier die Blätter einscannen oder abfotografieren und in eine einzelne Datei binden). Jede Lösung muss selbsterklärend formuliert sein. Angaben, die Sie zur Lösung brauchen und die nicht im Aufgabentext genannt sind, müssen Sie selbst recherchieren. Quellen, die Sie benutzt haben, müssen Sie zitieren. Computeralgebrasysteme (wie z.B. Wolfram Alpha, Maple, ChatGPT etc.) dürfen nur eingesetzt werden, wenn dies explizit angegeben ist.
Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes abgegebene Dokument! Jede(r) Studierende muss eine individuelle Lösung einreichen!

Hinweise und Notation

- Wenn nicht anders angegeben, gilt in allen Übungsaufgaben dieser VL folgende Notation für den Ortsvektor und seine Komponenten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1}$$

- Die Basisvektoren für kartesische Koordinaten x, y, z bezeichnen wir mit $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.
- Die Basisvektoren für Polarkoordinaten r, φ bezeichnen wir mit $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$.
- Die Hausaufgaben werden mit Sternen gekennzeichnet: ($***$) Essentiell, direkt klausurrelevant, $**$: klausurrelevant, $*$: weiterführend oder Wiederholung.

Lernziele dieses Übungsblattes

- Lösung von Differentialgleichungen, Anfangswertproblemen.
- Lösung der Differentialgleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators.
- Potentiale und Kraftfelder.
- Arbeit in einem Kraftfeld, Berechnung von Wegintegralen.

Hausaufgabe HA1.1 *Wiederholung, einfache Aufgaben zur VL* ($***$) **2+2+3+3+2 Punkte**

a) Betrachten Sie eine DGL für eine reelle Funktion $y = y(x)$ der Form:

$$y'' + ay = 0\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser DGL in Abhängigkeit des reellen Parameters a.

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für einen Massepunkt der Masse m in einer Dimension:

$$\ddot{x}(t) = -g\,; \quad x(t=0) = x_0; \quad \dot{x}(t=0) = v_0\,. \tag{3}$$

c) Bestimmen Sie für die folgenden dreidimensionalen Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$ jeweils ein Potential $V(\vec{r})$ ($\alpha, \beta =$const):

$$(i)\,\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r\,; \quad (ii)\,\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\beta}{r^3}\vec{e}_r\,. \tag{4}$$

Dabei ist $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $\vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$ der Einheitsvektor in radialer Richtung.
Hinweis: Es reicht, jeweils eine Funktion $V(\vec{r})$ anzugeben, und dann zu zeigen, dass es ein Potential zu $\vec{F}$ ist.

d) Gegeben seien folgende Potentiale $V = V(r)$ (α ist jeweils eine Konstante):

$$(i)\,V(r) = \frac{\alpha}{r}\,; \quad (ii)\,V(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}\,. \tag{5}$$

Geben Sie das zugehörige Kraftfeld an.

e) Gegeben seien folgende eindimensionale Potentiale $V = V(x)$ (κ ist jeweils eine Konstante):

$$(i)\,V(x) = \kappa x^2\,; \quad (ii)\,V(x) = V_0\sin^2(\kappa x)\,; \quad (iii)\,V(x) = V_0\cosh(\kappa x)\,. \tag{6}$$

Skizzieren Sie die Potentiale $V = V(x)$. Geben Sie das zugehörige Kraftfeld an.

Hausaufgabe HA1.2 *Ungedämpfter harmonischer Oszillator* ($* * *$) **3+3+3+3+3 Punkte**

Die Bewegungsgleichung des ungedämpften (eindimensionalen) harmonischen Oszillators lautet:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0\,. \tag{7}$$

a) Die allgemeine Lösung dieser DGL läßt sich sowohl durch

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

als auch durch

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

darstellen, wobei i.a. die Konstanten $a,\ b,\ A,\ B$ komplex sind. Rechnen Sie durch Einsetzen in Gl. (7) nach, dass beide Darstellungen wirklich Lösungen von Gleichung (7) sind.

b) Drücken Sie die Koeffizienten $A,\ B$ durch $a,\ b$ aus.

c) Die Anfangsbedingungen (darunter versteht man vorgegebene Werte für $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ für einen festen Zeitpunkt $t = t_0$) sind in der Mechanik reell, da $x(t)$ eine Ortskoordinate und $\dot{x}(t)$ die Geschwindigkeit ist. Folgern Sie aus $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$ mit reellem x_0, v_0, dass $A = \bar{B}$ gilt (d.h., dass A komplex konjugiert zu B ist).

d) Die (allgemeine) reelle Lösung von Gl. (7) läßt sich außerdem durch

$$x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{8}$$

darstellen. Drücken Sie X und φ durch a und b aus (hier sind X, φ, a, b reell).

e) Rechnen Sie nach, dass die Darstellung

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{x}e^{i\omega_0 t}\right)$$

mit komplexer Amplitude $\hat{x}$ mit Gl. (8) gleichwertig ist.

Hausaufgabe HA1.3 *Freier Fall mit Reibung* $(*)$ — 5 Punkte

Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit eines im freien Fall befindlichen Massenpunktes der Masse m, auf den neben der Schwerkraft die durch die Luftreibung verursachte Kraft $|\vec{W}| = \eta|\vec{v}|^2$ mit $\eta = \mathrm{const}$ wirke.
Hinweis: Die Aufgabe läßt sich ohne explizites Lösen der BWGL beantworten!

Hausaufgabe HA1.4 *Wegintegrale* $(*)$ — 8 Punkte

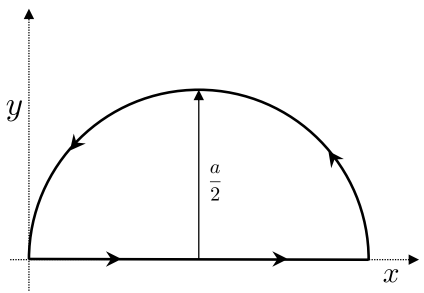
Wegintegrale treten in der klassischen Mechanik bei der Berechnung der in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ an einem Objekt geleisteten Arbeit

$$W = \int_{P(\vec{r}_2)}^{P(\vec{r}_1)} \vec{F}\cdot d\vec{s} \tag{9}$$

und bei der Berechnung des Potentials $V(\vec{r})$ zu einem konservativen Kraftfeld auf:

$$V(\vec{r}) = -\int_{P(\vec{r})}^{P(\vec{r}_0)} \vec{F}\cdot d\vec{s}\,. \tag{10}$$

Mit $P(\vec{r})$ bezeichen wir einen Punkt im dreidimensionalen Raum mit zugehörigem Orstvektor $\vec{r}$. In dieser Aufgabe wiederholen wir die technischen Aspekte des Berechnens von Wegintegralen, in einer Folgeaufgabe wenden wir das dann auf die Berechnung von Potentialen an.



Wir betrachten den zweidimensionalen Fall und wollen das Wegintegral eines Kraftfeldes $\vec{F}(\vec{r})$ entlang eines geschlossenen Weges berechnen (siehe Skizze). Die Kunst besteht nun darin, jedes Wegstück geeignet zu parametrisieren, d.h., einen Parameter t zu finden, so dass für ein Wegstück zwischen zwei Punkten $P_1 = P(\vec{r}_1)$ und $P_2 = P(\vec{r}_2)$ gilt (mit $t \in [t_1, t_2]$):

$$s \mapsto \vec{r}(s)\,, \quad \vec{r}(t_1) = P(\vec{r}_1)\,, \quad \vec{r}(t_2) = P(\vec{r}_2)\,; \tag{11}$$

dabei zeigt der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ entlang der Punkte auf dem Wegstück von P_1 nach P_2. Dann gilt:

$$\int_{P_1}^{P_2} d\vec{s}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{F}(\vec{r}(t))\,. \tag{12}$$

a) Zeichnen Sie in einem beliebigen Punkt auf dem Halbkreis (jedoch nicht auf der x-Achse) die Vektoren $d\vec{s}$, $\vec{r}$, $d\vec{r}/dt$ und $\vec{F}$ ein.

b) Finden Sie für den in der Skizze gezeigten geschlossenen Weg C (x-Achse von 0 bis a, dann Halbkreis mit Radius $a/2$) geeignete Parametrisierungen und berechnen Sie unter Berücksichtigung des gezeigten Umlaufsinns

$$\oint_C \vec{ds} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \tag{13}$$

für

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}\,, \tag{14}$$

mit k=const.

Selbsttest

- Was versteht man unter einer “gewöhnlichen Differentialgleichung”?
- Was benötigt man, um ein Anfangswertproblem lösen zu können?
- Welche Lösungsstrategien für Differentialgleichungen kennen Sie?
- Sind die beiden Ansätze zur Lösung der DGL des ungedämpften harmonischen Oszillators in HA1.2a) äquivalent?
- Was versteht man unter einem Kraftfeld, was unter einem Potential?
- Wie ist die an einem Objekt verrichtete Arbeit definiert?
- Wie berechnet man ein Linienintegral?