AnaMech
Vorlesung 3

Inhaltsverzeichnis

Uebersicht

- Team Captains
- Skript! Mitschreiben?
- Hoersaaluebung
- 2. Klausur im WiSe 2025
- Fragen?

Eindimensionale Systeme allgemein

Einen Massepunkt mit Masse m und Koordinate q

Beispiele:

1. Bewegung entlang einer kartesicschen Koordinate $q = x$
2. Feste (krummlinige) Kurve im $\mathbb{R}^3$ Koordinate i.a. nicht kartesisch
3. Problem als Resultat des Ausnutzens von erhaltungsgroessen (z.B. Zentralpotential, Hamiltonformalismus)

Formal:

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t), x(t_0), \dot{x}(t_0)$$

Zeitunabhaengige Probleme

$f = f(x)$

$\vec{f}$ ist konservativ $\Longrightarrow \exists V(\vec{r}) \Longrightarrow \vec{f}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \Longrightarrow E = T + V$ (Energieerhaltung)

$$V(x) = -\int_x^{x_0} dx' f(x')$$

dieses V existiert fuer stetige f. Im eindimensionalen Fall gilt dann

$$f(x) = -V'(x).$$

$$\Longrightarrow E = T(\dot{x}) + V(x) \text{ erhalten}$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}f} = 0, \forall t$$

Konsequenzen aus Energieerhaltung

Reduktion von DGL 2. Ordnung auf DGL 1. Ordnung ist der wichtigste Punkt dieser Vorlesung.

Sei E fest aber beliebig vorgegeben. Dann wissen wissen wir

$$
\begin{gathered}
E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) \\
\Longrightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - V(x))
\end{gathered}
$$

was eine DGL 1. Ordnung darstellt. Aus der Definition der kinetischen Energie folgern wir die Ungleichung

$$
E \geq V(x).
$$

es sind also nur diese x erlaubt! Die oben stehende DGL kann mittels TdV geloest werden

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \\
\Longrightarrow \int_t^{t_0} dt' = \pm \int_x^{x_0} dx' \left(\frac{2}{m}(E - V(x'))\right)^{-\frac{1}{2}} \\
\Longrightarrow t - t_0 = \pm \int_x^{x_0} dx' \left(\frac{2}{m}(E - V(x'))\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{gathered}
$$

Integrationskonstanten

Seien die Gesamtenergie E, t_0 und die Startposition $x_0 = x(t_0)$ gegeben. Folgern von allgemeinen Aussagen ohne Rechnen

1. $E = V(x_u) \Longleftrightarrow T = 0$ in dem Umkehrpunkt x_u
2. Natuerlich gilt $T(E, V) = E - V$
3. Verbotene Bereiche sind x mit $E < V(x)$, welche sich in einem V-x-Diagramm so erkannt werden koennen, dass
4. Offene Bahnen bedeutet, dass $|x|$ unbeschraenkt dies ist der Bereich unter der E -Kurve, so dass sie im weiteren Verlauf keinen Schnittpunkt mehr mit dieser hat
5. Geschlossene Bahnen, diese sind das Gegenstueck zu den offenen Bahnen und sind periodisch wodurch sie zu Oszillatoren werden

Periodische Bahnen

Fuer kleine Schwingungen entwickle $V(x)$ um x_0 (Position des Minimums)

$$
v(x) = v(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}V'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{24}V''''(x_0)(x - x_0)^4 + \dots
$$

Fuer kleine Amplituden sind die letzten Terme zu vernachlaessigen, da $O\big((x - x_0)^3\big)$.

$$
\begin{gathered}
V(x) = V(\delta_x) + \frac{1}{2}V''(x_0)\delta_x^2 \\
m\ddot{\delta}_n = m\ddot{x} = -V'(x) = -V''(x_0)\delta_x \\
\delta_x = x - x_0 \Longrightarrow \ddot{\delta}_x = \ddot{x} \\
\Longrightarrow m\delta_x + V''(x_0)\delta_x = 0, \omega_0^2 = \frac{V''(x_0)}{m}
\end{gathered}
$$

Periode allgemeine (beliebige Amplidtuden) geschlossene ahn, Umkehrpunkte x_3, x_2

$$
t = T, x = x_2, x_0 = x_3, t_0 = 0, x_0 = x_3
$$

$$t - t_0 = \pm \int_x^{x_0} dx' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$$\implies T = 2 \int_{x_2}^{x_3} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

1.

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \implies T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \omega_0 = \frac{k}{m}$$

$$\implies \omega_0 \neq \omega_0(a)$$

2. Anharmonischer Fall

$$\implies \omega = \omega(a)$$

$$V(x) \approx \frac{k}{2} x^2 + \varepsilon V_1(x) + \text{weitere Korrekturterme}$$

Dann wird dieser Ausdruck fuer das Potential in den fuer die Peiode eingesetzt

$$\implies T = T_0 \varepsilon^0 + I_1 \varepsilon + I_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Das Ziel ist dann I_1 zu berechnen.

$$[E - V(x)]^{-\frac{1}{2}} = \left[E - \frac{k}{2} x^2 - \varepsilon V_1(x)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$E = V(a) = \left[\frac{k}{2}(a^2 - x^2) - \varepsilon(V_1(x) - V_1(a))\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{k}{2}(a^2 - x^2)\right]^{-\frac{1}{2}} [1 - \varepsilon A]^{-\frac{1}{2}}$$

$$A = \frac{V_1(x) - V_1(a)}{\frac{k}{2}(-x^2 + a^2)}$$

$$(1 - u)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} u, \text{fuer } u \text{ klein}$$

TODO: refactor the calculations